２０１９年　年賀問題

この問題では数は無限にあるので、任意の数を選んだとき、それが3の倍数、3で割って余りが$1, 2$ になる確率は $\dfrac{1}{3}$ とします。

まず3の倍数の性質を確認してみます。法を3として,

$$n \equiv 0 \text{ ならば } n^2 \equiv 0$$
$$n \equiv 1 \text{ ならば } n^2 \equiv 1$$
$$n \equiv 2 \text{ ならば } n^2 \equiv 1$$

すなわち

$$\begin{cases} n \equiv 0 \to n^2 \equiv 0 & (1) \\ n \not\equiv 0 \to n^2 \equiv 1 & (2) \end{cases}$$

このことから, 中吉となるのは, $a \not\equiv 0, b \not\equiv 0$ のときである。

$$c^2 \equiv a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2$$

これより中吉の確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

大凶となるには $a \equiv 0, b \equiv 0$ のとき $c^2 \equiv 0$ となるが, これは (a, b) が互いに素ではないのでありえない。つまり大凶の確率は 0 である。

そこで大吉の確率は余事象をしらべて

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

それぞれの確率は,

$$\text{大凶} \cdots 0, \text{大吉} \cdots \frac{5}{9}, \text{中吉} \cdots \frac{4}{5} \cdots \text{(答)}$$

ところで, 余事象を使わずに大吉の確率を求めてみましょう。大吉は a, b の一方が 3 の倍数で他方が 3 の倍数ではないときだから,

$a \not\equiv 0, b \equiv 0$ のとき, または $a \equiv 0, b \not\equiv 0$ の確率を求めて,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

おや？これだと $\dfrac{5}{9}$ になりません。それぞれの確率を足しても

$$0 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \neq 1$$

どこが間違えているかわかりますか？

ひとつめに思いついた数を a とし、それと互いに素になるように考えたものを b とするとき、a で 3 の倍数を考えたとき、互いに素な数ですから b では必ず 3 の倍数以外を考えるはずです。つまり $a \equiv 0, b \not\equiv 0$ の確率は事象 E を 3 の倍数を考える, 事象 F を 3 の倍数以外の数を考えるとしたとき,

$$P(E) \cdot P_E(F) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad \leftarrow P(E) \times P(F) \text{ ではない}$$

となり、大吉の確率はやはり,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{5}{9}$$

となります。