

【円の方程式を用いると】

解答制限にも書いていますが、初等幾何の問題として出題していますので、以下の解答は誰がみても不可ですね。

$B(0, 0)$, $C(10, 0)$, $A(0, 10)$ とする座標平面を考える。
点 D を中心とする円の方程式が

$$(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100 \dots \textcircled{1}$$

BC を直径とする円の方程式が

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \dots \textcircled{2}$$

① - ② より、

$$-10x - 20y + 175 = 75 \iff x + 2y - 10 = 0 \dots \textcircled{3}$$

②, ③ の交点を求める。 x を消去し

$$(5 - 2y)^2 + y^2 = 25$$

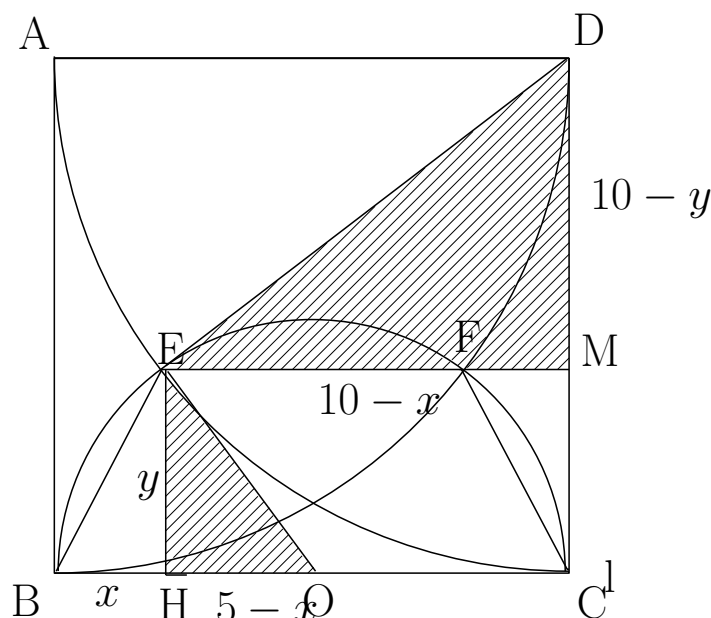
これを解いて $y = 0, 4$

これより $E(2, 4)$ のとき、 $E(2, 4)$, $F(8, 4)$, $B(0, 0)$, $C(10, 0)$ だから、よって求める面積 S とすると、

$$S = \frac{(6 + 10) \times 4}{2} = 32 \text{ cm}^2$$

【三平方の定理だけで解くと？】

三平方の定理だけで解いた解答は、基本的に初等幾何の性質を使った解答とは言えないので不可としましたが、そもそも解いたほうも、円の方程式を使ったという意識（具体的には幾何を使っていないとゆう意識）がないようですし、問題の制限指定も曖昧なので、結局すべて正解としました笑

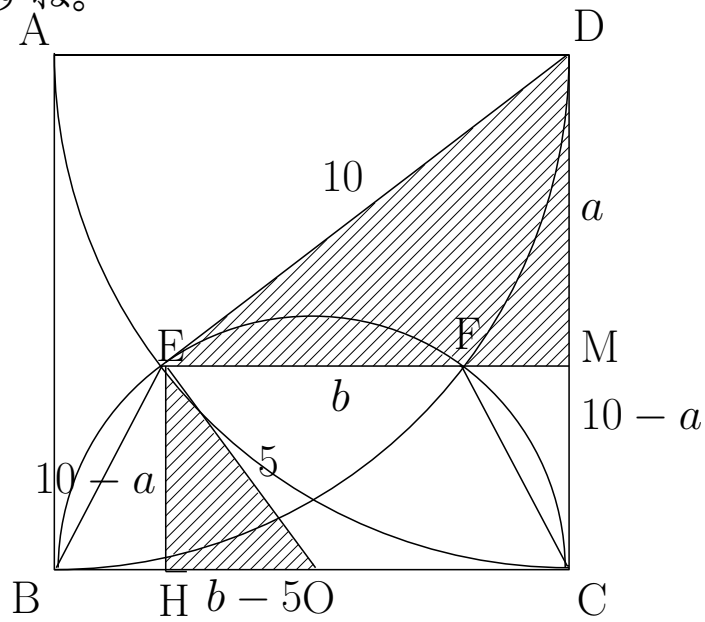


BC の中点を O, E から BC に下した垂線の足を H とする。
 $BH = x$, $EH = y$ とし $\triangle OEH$, $\triangle DEM$ に三平方の定理を使うと.

$$\begin{cases} (5 - x)^2 + y^2 = 25 \\ (10 - x)^2 + (10 - y)^2 = 100 \end{cases}$$

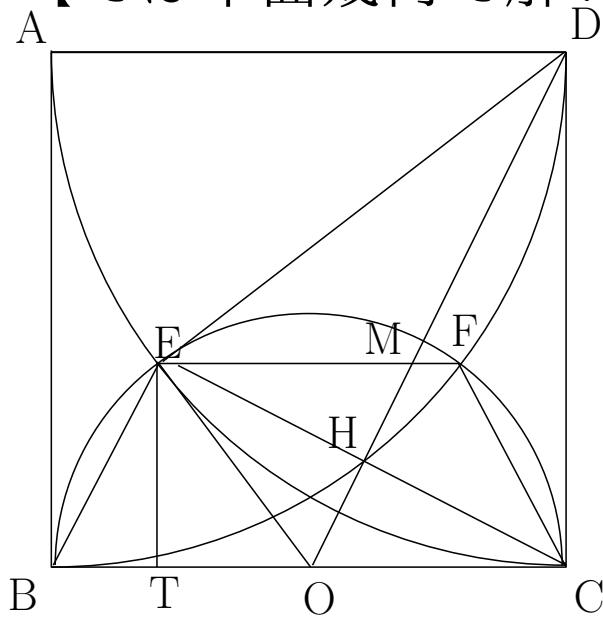
三平方の定理を使ったのですが、実質的に ①, ② と同じ式です。本来円の方程式が、2点間の距離から出てくる式なので、三平方の定理だけで解くとゆうことは、実質円の方程式で解くことと同じで初等幾何で解いてほしいとゆう出題の意図と

はちょっとずれます。 x, y を a, b として、文字を置く場所を変えると、もうまったく円の方程式を使った形ではありませんが、しかしやはり本質は同じで初等幾何で解いたとはいいがたいですね。



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ (10 - a)^2 + (b - 5)^2 = 25 \end{cases}$$

【では平面幾何で解いてみましょう】



$$\triangle DEO \equiv \triangle DCO \text{ (三辺相当)}$$

これより,

$$DE = DC, \angle EDO = \angle CDO$$

また DH 共通だから,

$$\triangle EDH \equiv \triangle CDH \text{ (二辺夾角相当)}$$

これより,

$$\angle DHE = \angle DHC \iff OD \perp EC$$

このとき.

$$\angle CDO = \angle ECT = \theta \text{ とおくと,}$$

$$\triangle EBT \sim \triangle CET \sim \triangle DOC \text{ (二角相当)}$$

このとき,

$$BT : TE = ET : TC = OC : CD = 1 : 2$$

だから

$$BT = x \text{ とおくと, } ET = 2x, TC = 4x$$

$$BT + TC = 10 \iff x + 4x = 10$$

$$\therefore x = 2$$

これより求める面積は

$$\frac{4(6 + 10)}{2} = 32$$

これ以外にも、初等幾何だけで解く方法はいくつか考えられます。たとえば

$$\angle EDO = \angle CDO$$

から角の二等分定理を使った解答なども可能です。興味のある人は考えてみて下さい。ただし解けてももう特典はありませんが（笑）