2002年 千葉

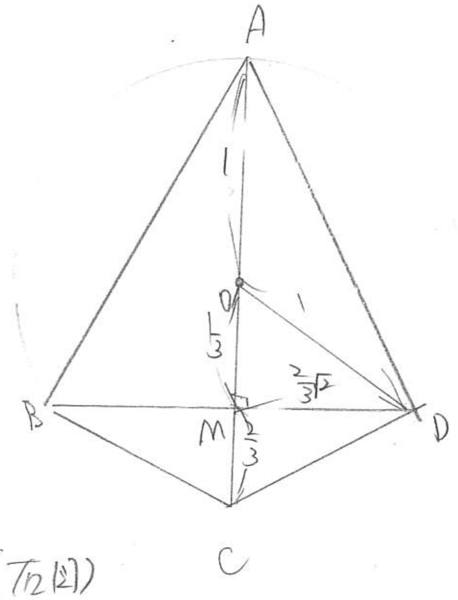
7 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，

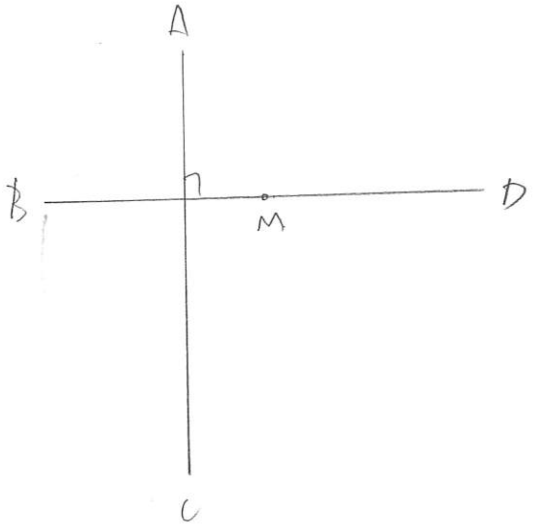
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0}$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。





(右図)

BDの中点をMとする

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0}$ より

$2\overrightarrow{AM}+4\overrightarrow{CM}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{CM}$

これより

3点A, M, Cは一直線上にあるので、

ACはBDの中点を通る。

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ より $AC\perp BD$ また ACは BCの中点 Mを通るので

ACは直径 かつ (1)より $AM:CM=2:1$ より

よって $AO=1$, $OM=\frac{1}{3}$

$MD=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって

$BC=CD=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{12}{9}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AB=AD=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}$

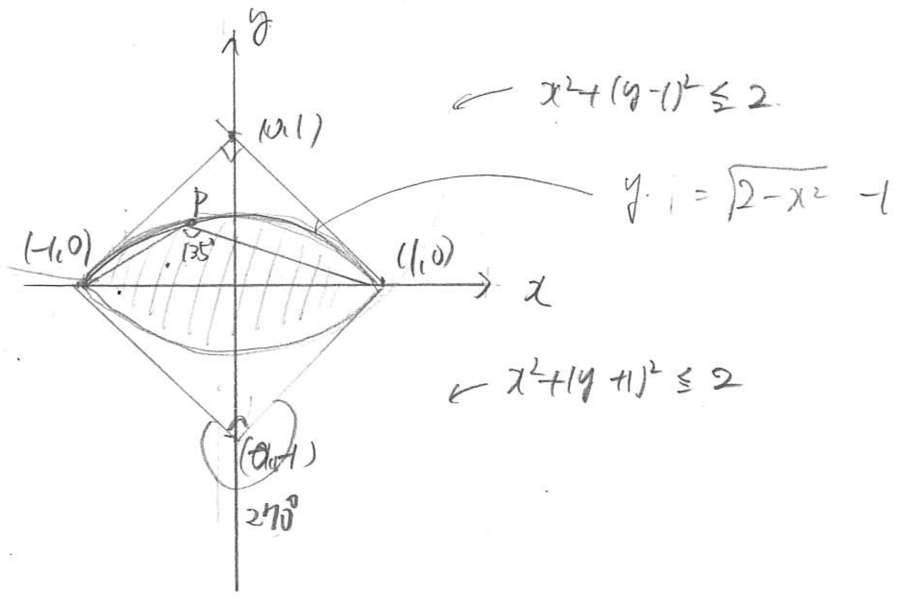
$=\sqrt{\frac{16+8}{9}}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

8 座標空間内に 2 点 A (1, 0, 0) と B (−1, 0, 0) がある。不等式

$$\angle \mathrm{APB} \geqq 135^\circ$$

をみたす空間内の点 P の全体の集合に，2 点 A, B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ。



∠APB ≦ 135° をみたす P の全体は xy平面で

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2 \leqq 2 \\ x^2+(y-1)^2 \leqq 2 \end{cases}$$

をみたす部分を x軸のまわりに回転したものである。

よって、

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{2-x^2} - 1\right)^2 dx$$

$2 - x^2 - 2\sqrt{2-x^2} + 1$

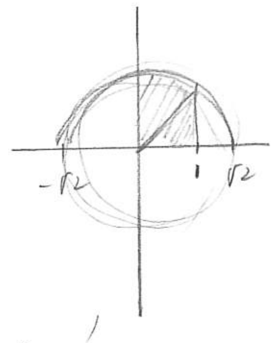
$$= 2\pi \int_0^1 \left(3 - x^2 - 2\sqrt{2-x^2}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (3 - x^2)\, dx - 4\pi \int_0^1 \sqrt{2-x^2}\, dx$$

$$= 2\pi \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - 4\pi \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\pi \times \frac{8}{3} - \pi^2 - 2\pi$$

$$= \frac{10}{3}\pi - \pi^2$$



$\frac{16}{3} - 2 \quad 3 - \frac{1}{3}$

10 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

(1) $\log_2 3$ が有理数と仮定すると $\log_2 3 > 1$ より

このとき $\log_2 3 = \frac{q}{p}$ （p, q は互いに素な自然数）とおける.

$3 = 2^{\frac{q}{p}}$

$3^p = 2^q$ が成り立つが，これは

左辺奇数，右辺偶数より矛盾

よって $\log_2 3$ は無理数である.

n は正の整数

(2) $\log_2 n$ が有理数となるとき $n \geq 1$ で $\log_2 n \geq 0$ より

このとき $\log_2 n = \frac{q}{p}$ （p, q は互いに素な整数，$p \geq 1$, $q \geq 0$ とおける）

$2^{\frac{q}{p}} = n$

$2^q = n^p$ が成り立つ.

2^q が素因数 2 しかもたないので

$n = 2^r$ とおけて （r は 0 以上の整数）

$2^q = (2^r)^p = 2^{pr}$

よって $q = pr$

$r = \frac{q}{p}$

r が整数 かつ p, q は互いに素だから $p = 1$ に限り

このとき $\log_2 n = \frac{q}{p} = q$ となる

すなわち，$\log_2 n$ が有理数のとき 整数だから，整数でない有理数となることはない

$\log_2 3$ $1.5 = \log_2 2^{\frac{3}{2}}$ より $\log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} = 1.5$

$1.6 = \log_2 2^{\frac{8}{5}}$ $\log_2 3 < \log_2 2^{\frac{8}{5}} = 1.6$

$3^5 = 243$, $2^8 = 256$

よって $\log_2 3$ の小数第1位は 5

11 n を2以上の整数とし，

$$I(x)=\int_0^x \sin t\ \sin nt\ dt \qquad (x \geqq 0)$$

と定める。

(1) $n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が

$$\frac{n}{n^2-1}$$

であるならば，n は偶数であることを証明せよ。

(1) $n=2$ のとき

$$I(x)=\int_0^x \sin t \sin 2t\, dt$$

$$=2\int_0^x \sin^2 t \cos t\, dt$$

$$=2\int_0^x \sin^2 t\,(\sin t)'\, dt$$

$$=\frac{2}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^x$$

$$=\frac{2}{3}\sin^3 x \leqq \frac{2}{3} \quad \left(x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\text{は整数}\right)$$

よって $\underline{\text{最大値}\ \frac{2}{3}\ \left(x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\text{は整数}\right)}$

(2) $$I(x)=\int_0^x \sin t \sin nt\, dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x \{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t\}\, dt$$

$\cos(nt+t)=\cos nt\cos t-\sin nt\sin t$
$\cos(nt-t)=\cos nt\cos t+\sin nt\sin t$

$\dfrac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{2}=\sin nt\sin t$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}\sin(n-1)t-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{n^2-1}$$

$$=\frac{n}{n^2-1}$$

ここで等号が成立するのは

$\sin(n-1)x=1$ かつ $\sin(n+1)x=-1$

のときだから

$$\begin{cases}(n-1)x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi=\left(\dfrac{1}{2}+2k\right)\pi\\ (n+1)x=-\dfrac{\pi}{2}+2l\pi=\left(-\dfrac{1}{2}+2l\right)\pi\end{cases}$$

x を消去し

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi=\frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{2}+2l\right)\pi$$

$$(n+1)(1+4k)=(n-1)(-1+4l) \xrightarrow{\text{合同式で}}$$

$\iff n(1+4k+1-4l)=-1-4k+1-4l$

$n(4k-4l+2)=-8l$

$n(2k-2l+1)=-4l$

右辺は偶数，$2k-2l+1$ は奇数なので

n は偶数である

$(n+1)(1+4k)-(n-1)(-1+4l)=0$ より 両辺を 4 で

$(n+1)(1+4k)-(n-1)(-1+4l)$

$\equiv (n+1)\times 1-(n-1)\times(-1)$

$\equiv n+1+n-1$

$\equiv 2n\equiv 0 \pmod 4$

となるとき，n は偶数である。

12 無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c$$
$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 - 1}{n} \quad (n \geqq 1)$$

で定める。ここで c は定数とする。

(1) $c = 2$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $c \geqq 2$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となることを示せ。

(3) $c = \sqrt{2}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。

(1) $a_1=2$,
$a_2=a_1^2-1=3$,
$a_3=\frac{9-1}{2}=4$,
$a_4=\frac{15}{3}=5$

これより $a_n=n+1$ と推定される。推定が正しいことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき成立

(ii) $n=k$ での成立を仮定する。すなわち $a_k=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=\frac{(k+1)^2-1}{k}$$
$$=(k+1)+1$$ より $n=k+1$ で成り立つ。

よって $a_n=n+1$

(2) $a_n \geqq n+1$ であることを数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき $a_1=c\geqq 1+1$ ($\because c\geqq 2$) より成立

(ii) $n=k$ での成立を仮定する。すなわち

$a_k\geqq k+1$ のとき

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2-1}{k}\geqq\frac{(k+1)^2-1}{k}$$
$$=\frac{k^2+2k}{k}=(k+1)+1$$

より $n=k+1$ でも成立する。

よって $a_n\geqq n+1$

$\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$ だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

(3) $n\geqq 2$ のとき
$-1\leqq a_n\leqq 1$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $a_2=a_1^2-1=2-1=1$ より成立

(ii) $n=k(\geqq 2)$ での成立を仮定する

$-1\leqq a_k\leqq 1$ のとき

$$-1\leqq -\frac{1}{k}\leqq a_{k+1}=\frac{a_k^2-1}{k}\leqq 0$$

より $n=k+1$ で成立

このとき

$$-\frac{1}{n}\leqq\frac{a_n^2-1}{n}\leqq 0$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ より はさみうちの原理より

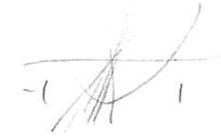
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-1}{n}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

$a_n=x$ に収束するとして

$nx=x^2-1$



$-1\leqq x=a_n\leqq 1$ であれば 0

$\boxed{13}$-[ア]

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で方程式

$$|z-3i| = 2|z|$$

が表す図形を求め，図示せよ。

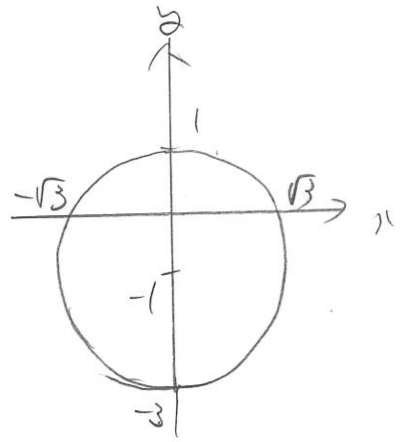
(2) 複素数 z が (1) で求めた図形の上を動くとき，複素数

$$w = (-1+i)z$$

が表す点の軌跡を求め，図示せよ。

(1)
$$|z-3i|^2 = 4|z|^2$$
$$(z-3i)(\bar{z}+3i) = 4z\bar{z}$$
$$z\bar{z} + 3iz - 3i\bar{z} + 9 = 4z\bar{z}$$
$$3z\bar{z} - 3iz + 3i\bar{z} = 9$$
$$z\bar{z} - iz + i\bar{z} = 3$$
$$(z+i)(\bar{z}-i) = 4$$
$$|z+i|^2 = 4$$
$$|z+i| = 2 \quad \cdots ①$$

中心 $-i$ 半径2 の円を図示して



●M34(185—14)

(3) $W = \dfrac{z+i}{z-i}$ zが(1)の図形上を動くとき wは

$$wz - wi = z + i$$
$$(w-1)z = i(w+1)$$
$w \neq 1$より $z = \dfrac{w+1}{w-1}i$

$$\left|\frac{(w+1)i}{w-1} + i\right| = 2 \qquad \left|\frac{2w}{w-1}\right| = 2$$

$$\left|\frac{wi + i + wi - i}{w-1}\right| = 2 \qquad |w| = |w-1|$$

(2)

$$w = (-1+i)z$$
$$z = \frac{w}{-1+i}$$

これを①に代入し

$$\left|\frac{w}{-1+i} + i\right| = 2$$
$$\left|\frac{w - i - 1}{-1+i}\right| = 2$$
$$|w - (1+i)| = 2\sqrt{2}.$$

$1+\sqrt{7}$

$(1+i)$ 中心，半径 $2\sqrt{2}$ の円