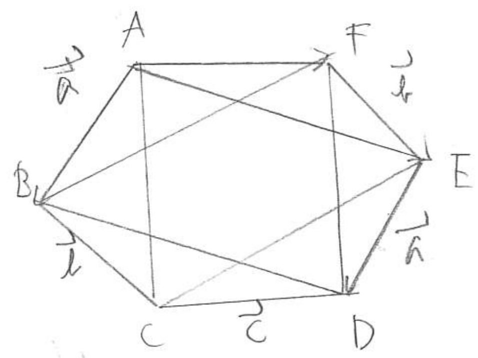
2003年 千葉

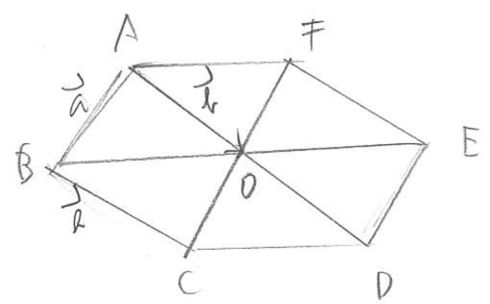
6 R を平面上の凸6角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ とおく。
R が $\overrightarrow{ED}=\vec{a}$, $\overrightarrow{FE}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{AF}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3) R が (2) の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき，R の面積を求めよ。





(1) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$
$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{a})+(-\vec{b})$
$=\vec{c}$ $(\because \overrightarrow{ED}=\vec{a}, \overrightarrow{FE}=\vec{b})$ //

(2) △ACEの重心 G_1 とすると
$\overrightarrow{AG_1}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}}{3}$
$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{b})$
$=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$

●M32(057—35)

△BDFの重心 G_2 とすると
$\overrightarrow{AG_2}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}}{3}$
$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{c})$
$=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$

$\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AG_2}$ より
$\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$
よって $\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ //

(3) $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=4\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=1\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=-1\\ \vec{b}=\vec{a}+\vec{c}\end{cases}$

$\vec{c}$を消去し
$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=4\\ \vec{b}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=1\\ \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=-1\end{cases}$
これより $|\vec{b}|^2=5$, $|\vec{a}|^2=5$

□ACDF, □BCEF より
六角形の対角線は1点で交わり
$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+(\vec{b}-\vec{a})$
$=2\vec{b}$
$\overrightarrow{AO}=\vec{b}$
このとき

Rの面積 $S=6\triangle ABO$ だから
$=6\times\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$
$=3\sqrt{5\times5-16}$
$=3\times3$
$=9$

$\boxed{7}$ 実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて

$$x=f(t),\quad y=-2t \quad (t\text{ は実数})$$

と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。

$u^3-3u+2t=0$

$\Leftrightarrow \quad -2t=u^3-3u$

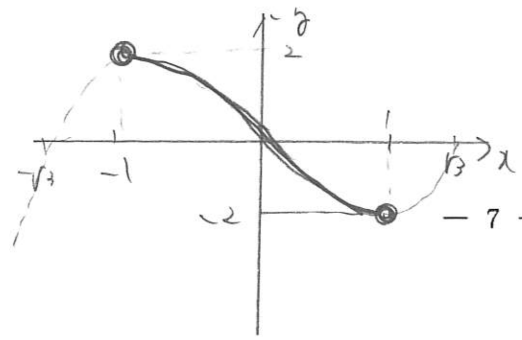
の実数解は

$\begin{cases} y=-2t \\ y=u^3-3u \end{cases}$

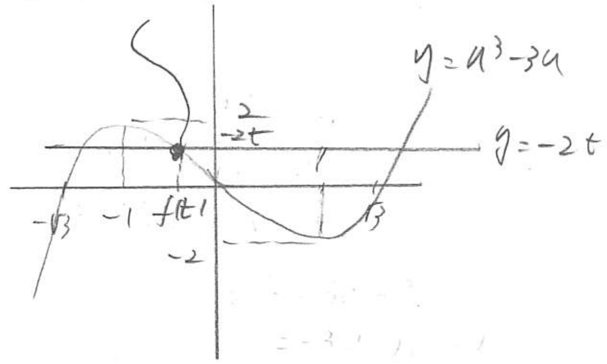
の共有点で絶対値最小のものを $f(t)$ とすると，

$\begin{cases} x=f(t) \\ y=-2t \end{cases}$

で表される曲線は



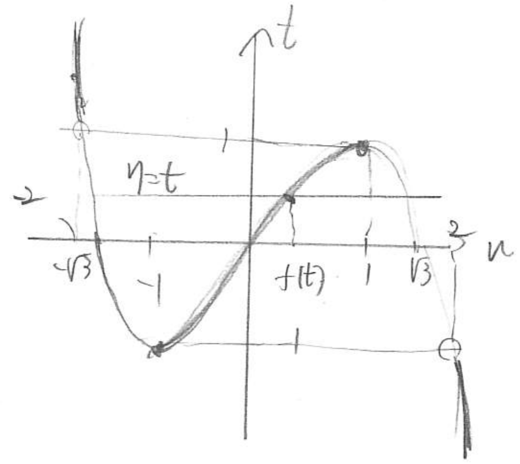
$(x,y)=(f(t),-2t)$



$y'=3u^2-3$
$=3(u+1)(u-1)$

$u^3-3u+2t=0$

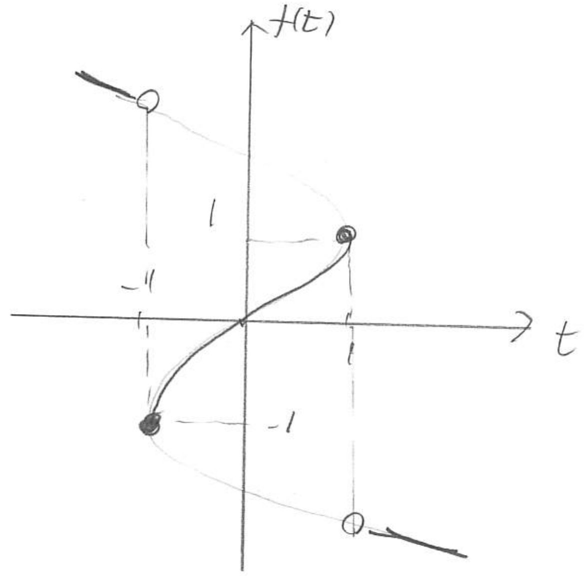
$t=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u$ $\qquad -\frac{3}{2}u^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(u+1)(u-1)$



$-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u=1$

$u^3-3u+2=(u-1)^2(u+2)$

よって t と $f(t)$ の関係は 上の図より，$t=\pm 1$ で連続でなく グラフは次のようになる。



$\boxed{9}$ 関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され，すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき，以下の命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。

(1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。このとき，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。

(2) $f(0) = 0$ かつ，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ である。

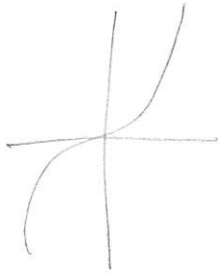
(3) $f(0) = 0$ かつ，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$ である。

(1) 正しくない

(反例) $f(x)=x^3$ は単調増加なので

$x_1<x_2$ のとき $f(x_1)<f(x_2)$ が成立するが

$f'(0)=0$

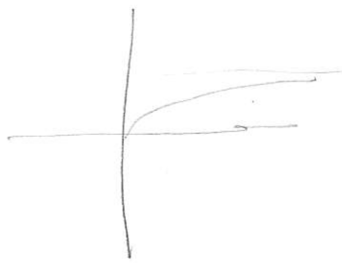


(2) 正しくない

(反例) $f(x) = 1-\frac{1}{e^x}$　$1-e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} > 0$ であるが

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$



(3) 正しい。

xが十分に大きいとき，$f'(x)>0$ なので $f(x)>f(1)>0$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$

$$\geqq \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(1)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt + f(1)(x-1)$$

$$= \underbrace{C}_{\text{定数}} + \underbrace{f(1)}_{\text{正}}\cdot(x-1)$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} C + \underbrace{f(1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{\infty}$

$= \infty$

10 a は定数とし，n は 2 以上の整数とする。関数

$$f(x) = ax^n \log x - ax \qquad (x > 0)$$

の最小値が -1 のとき，定積分

$$\int_1^e f(x)\,dx$$

の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

$f(x) = ax^n \log x - ax \quad (x > 0)$

$f'(x) = a(nx^{n-1}\log x + x^{n-1}) - a$

$= a\{\underbrace{nx^{n-1}\log x + x^{n-1} - 1}\} \cdots ①$

単調に増加し，$x=1$ のとき 0

定数 a の符号を調べる

$a=0$ のとき $f(x)=0$ より 最小値 -1 にならない

$a<0$ のとき $\lim_{x\to\infty} ax^n \log x - ax$

$= \lim_{x\to\infty} ax(x^{n-1}\log x - 1) = -\infty$

より最小値 -1 にならない

よって $a>0$ であり，①より $x>0$ で $f(x)$ の増減を調べると

x	(0)		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最	↗

すると

$f(1) = -a = -1$ より $a=1$

これより

$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (x^n \log x - x)dx$

$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{n+1}x^n dx - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^e$

$= \frac{1}{n+1}e^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}\right]_1^e - \frac{1}{2}(e^2-1)$

$= \frac{1}{n+1}e^{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$

$= \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2} - \frac{e^2-1}{2}$

11 p を素数とする。x に関する 2 次方程式

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

が整数の解を持つのは $p=2$ のときに限ることを示せ。

$px^2+(5-p^2)x-3p=0$ $(p\neq 0)$.

判別式 D とすると

$D=(5-p^2)^2+12p^2$

$=p^4+2p^2+25$

整数解をもつとき これが平方数であることが必要

$p^4+2p^2+25=N^2$ $(N>0)$

$(p^2+1)^2-N^2=-24$

$(p^2+1+N)(p^2+1-N)=-24$

$(p^2+1+N,\ p^2+1-N)=(6,-4),(12,-2),(24,-1)$

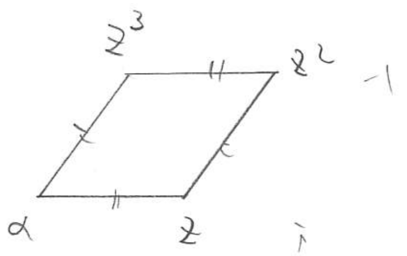
$p\geq 2,\ N\geq 1$ より

これを解いて

$(p^2, N)=(0, 5),(4, 7),\left(\frac{21}{2},\frac{25}{2}\right)$

p が素数となるのは $p^2=4$ より $p=2$ に限る。

14-[ア] a を実数とし，z を複素数とする。複素数平面上で，a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が，あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。



ひし形く平行四辺形で対角線が中点で交わるので

$$\frac{\alpha+z^2}{2} = \frac{z+z^3}{2}$$

$$\alpha + z^2 = z + z^3 \quad \text{----①}$$

4辺の長さが等しいので

$$|z-\alpha| = |z^2 - z| \quad \text{--②}$$

αを消去し

$$|z - z - z^3 + z^2| = |z^2 - z|$$

$$|z^2(z-1)| = |z(z-1)|$$

z=0のとき 3点が一致し不適 より z≠0なので

$$|z(z-1)| = |z-1|$$

z=1のとき 3点が一致し不適より z≠1

$$\therefore |z| = 1$$

①より

$$\alpha = z + z^3 - z^2$$

αが実数なので $\alpha = \bar{\alpha}$，$\bar{z} = \frac{1}{z}$ に注意し

$$z + z^3 - z^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2}$$

$$z^4 + z^6 - z^5 = z^2 + 1 - z$$

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^2 + z - 1 = 0$$

$$z^4(z^2 - z + 1) - (z^2 - z + 1) = 0$$

$$(z^4 - 1)(z^2 - z + 1) = 0$$

$$z = \pm 1, \pm i, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} i$$

$z=1$ のとき　$z = z^2 = z^3$ となり不適

$z=-1$ のとき　$z = z^3$　〃

$z=i$ のとき　$z=i,\ z^2=-1,\ z^3=-i.\ \alpha = 1$

$z=-i$ のとき　$z=-i,\ z^2=-1,\ z^3=i\ \ \alpha = 1$

$z = \cos(\pm\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pm\frac{\pi}{3})$ のとき

z, z^2, z^3 は異なるので適

このとき $\alpha = z + z^3 - z^2$

$$= (\cos\tfrac{\pm\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pm\pi}{3}) + (\cos \pm\pi + i\sin \pm\pi) - (\cos\tfrac{\pm 2}{3}\pi + i\sin\tfrac{\pm 2}{3}\pi)$$

$$= (\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}i) + (\mp 1) - (-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$= 0$$

以上より　$(\alpha, z) = (1, \pm i), (0, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2})$