2005年千葉

4 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 2$, $a_2 = 4$ である。

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

とおくとき，$\{b_n\}$ は正の公比をもつ等比数列とする。

(1) $\dfrac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}$ を，b_n, b_{n+1} を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = -1456$ が成り立つとき

(i) 一般項 b_n を求めよ。

(ii) 一般項 a_n を求めよ。

(1) $\dfrac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

$= b_n - b_{n+1}$ //

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_7$

$= -1456$

$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = 2$ ， $\{b_n\}$の公比を $r > 0$ とすると

$b_n = 2 \cdot r^{n-1}$ より

$b_1 - b_7 = 2 - 2r^6 = -1456$

$r^6 = 1 + 728 = 729 = 3^6$

$r > 0$ より $r = 3$

(i) $\{b_n\}$は 初項 2，公比3の等比数列より

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ //

(ii) $a_{n+1} = b_n a_n$

$= 2 \cdot 3^{n-1} a_n$

$n \geqq 2$ で

$a_2 = 2 \cdot a_1$

$a_3 = 2 \cdot 3 \cdot a_2$

$a_4 = 2 \cdot 3^2 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-2} a_n$

辺々かけて

$a_n = 2^{n-1} \cdot 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1$

$= 2^n \cdot 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$

$n = 1$のとき $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$ となり $n = 1$でも成立する

よって $a_n = 2^n \cdot 3^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ //

$\boxed{7}$

(1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2) x, y が (1) の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) $-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1 \geqq -2x^2+2x+1 > 0$

左2辺より，

$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-x^2+2x \geqq 0$

$y^2+(2x-1)y-x^4+2x^3+x^2-2x \leqq 0$

$y^2+(2x-1)y-x(x^3-2x^2-x+2) \leqq 0$

$y^2+(2x-1)y-x(x-2)(x+1)(x-1) \leqq 0$

$-(x^2-2x)$

x^2-1

$\{y-x(x-2)\}\{y+(x+1)(x-1)\} \leqq 0$

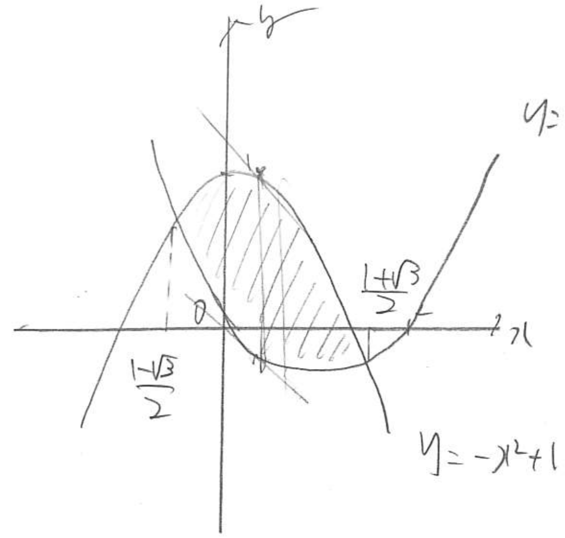
$y=x^2-2x$　$-x^2+1$

右2辺より　$2x^2-2x-1<0$

$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

このとき　$-(x^2-1) > x^2-2x$ より

$x^2-2x < y < -x^2+1$



$x^2-2x=-x^2+1$

$2x^2-2x-1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{\ }}{2}$

斜線部分で境界を含まない

(2) $x+y=k$ とおく

$y=-x+k$ が (1) の領域と共有点をもつ条件を求める

$\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=-x+k \end{cases}$ が接するとき　$x^2-x+k-1=0$

判別式 D とすると

$D=1-4(k-1)$

$=5-4k=0$　$k=\frac{5}{4}$

このとき　$x=\frac{1}{2}$ は領域内の点で，この点で共有点をもつ

$y=x^2-2x$

$y=-x+k$　が接するとき　$x^2-x-k=0$　の判別式を D とすると

$D=1+4k=0$，　$k=-\frac{1}{4}$

このとき　$x=\frac{1}{2}$ は領域内の点で　この点で共有点をもつ

よって　最大値 $\frac{5}{4}$　$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ のとき

最小値 $-\frac{1}{4}$　$(x,y)=(\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$ のとき

10 以下において $\log x$ は自然対数を表す。

(1) $a > \frac{1}{e}$ のとき, $x > 0$ に対し $x^a > \log x$ であることを示せ。

(2) $a > \frac{1}{e}$ のとき, $\lim_{x \to +0} x^a \log x = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $0 < t < \frac{1}{e}$ として, 曲線 $y = x\log x$ $(t \leqq x \leqq 1)$ および x 軸 と 直線 $x = t$ で囲まれた部分を, y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき, $\lim_{t \to +0} V(t)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^a - \log x \quad (x>0)$ とおく.

$$f'(x) = ax^{a-1} - \frac{1}{x} = \frac{ax^a - 1}{x} = \frac{a\left(x^a - \frac{1}{a}\right)}{x}$$

x	0		$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$$f\left(\left(\tfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a} - \log\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}(1 + \log a) > \frac{1}{a}(1 + \log e^{-1}) = 0$$

これより $x^a > \log x$

(2) $x = \frac{1}{t}$ とおくと $x \to +0$ のとき $t \to \infty$ で

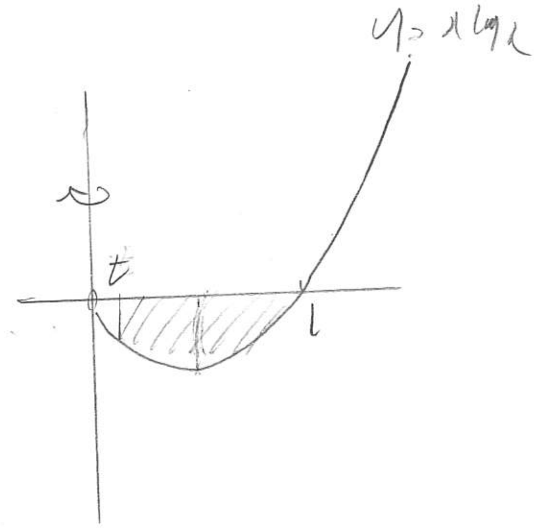
$$\lim_{x \to +0} x^a \log x = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{t}\right)^a \log\frac{1}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{-\log t}{t^a} = 0 \quad (\because ※)$$

(3) $0 < t < \frac{1}{e}$

$y = x\log x \quad (t \leqq x \leqq 1)$

$y' = \log x + 1$

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$



$$V = \int_t^1 -2\pi x^2 \log x\, dx$$
$$= 2\pi \int_1^t x^2 \log x\, dx$$
$$= 2\pi \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 \log x\right]_1^t - \frac{1}{3}\int_1^t x^2\, dx \right\}$$
$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{3}t^3 \log t - \frac{1}{9}(t^3 - 1) \right\}$$

x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$\log x$	$\frac{1}{x}$

(2)より $3 > \frac{1}{e}$ だから $\lim_{t \to +0} t^3 \log t = 0$

よって $\lim_{t \to +0} V = \frac{2}{9}\pi$

※ (1)より $x^{\frac{1}{e}} \geqq \log x$

$$x^a > x^{\frac{1}{e}} \geqq \log x$$

$$\therefore\ 0 < \frac{\log x}{x^a} < x^{\frac{1}{e} - a} < \frac{1}{x^{a - \frac{1}{e}}}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{a - \frac{1}{e}}} = 0$ より はさみうちの原理より $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$

11 n は自然数とし, 2^n は 100 桁の数で, 2^{n-1} は 99 桁の数である。

(1) n を求めよ。

(2) 2^n の一の位の数字を求めよ。

(3) 2^n の十の位の数字を求めよ。

ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ としてよい。

(1) 2^nは100桁で, 2^{n-1}は99桁だから

$$\begin{cases} 99 \leqq \log_{10} 2^n < 100 \\ 98 \leqq \log_{10} 2^{n-1} < 99 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 99 \leqq n \times 0.3010 < 100 \\ 98 \leqq (n-1) \times 0.3010 < 99 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 328.9.. \leqq n < 332.2.. \\ 326.5. \leqq n < 329.9 \end{cases}$$

$\therefore \quad 328.9. \leqq n < 329.9.$

これを満たす $n = 329$

(2) 2^nの一の位は 2, 4, 8, 6 をくり返すので

$329 \div 4 = 82 \cdots 1$ から 2

2^nの下2桁は

02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48,

96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04.

周期20で

$329 \div 20 = 160 \cdots 9$

すなわち $329 = 1 + 20 \times 160 + 8$ から下2桁は12で

十の位は 1である。

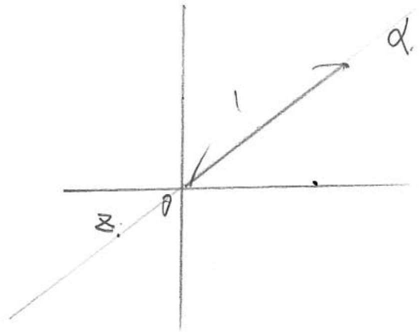
(3)

$$\frac{2^{329}}{10}$$

12 -［イ］ α は絶対値 1 の複素数とし, 複素数 z に対して, $w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で, z が原点と点 α を通る直線上 (ただし, 点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く) を動くとき, w を表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で, z が不等式 $|z| > 1$ を満たすとき, 複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。



(1) zが原点と点αを通る直線上にあるとき,

$z = l\alpha$ $(l \neq \frac{1}{2})$ と表されて,

このとき,

$$w = \frac{l\alpha\overline{\alpha} - 2}{2l\alpha - \alpha} = \frac{l-2}{(2l-1)\alpha} \quad (\because |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha} = 1)$$

$$= \underbrace{\frac{l-2}{2l-1}}_{実数}\overline{\alpha} \qquad \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$$

よってwを表す点は原点と$\overline{\alpha}$を通る直線上にある。

◇M5(095—47)

(2)

$w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ より

$(2z - \alpha)w = \overline{\alpha}z - 2$

$(2w - \overline{\alpha})z = \alpha w - 2$

$z = \dfrac{\alpha w - 2}{2w - \overline{\alpha}}$ （$w = \frac{\overline{\alpha}}{2}$ とすると 左辺$=0$, $\alpha w = \alpha\frac{\overline{\alpha}}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \neq 0$ より 上式が成立しないので, $2w - \overline{\alpha} \neq 0$）

$|z| > 1$ を動くとき

$z\overline{z} > 1$ だから

$$\frac{\alpha w - 2}{2w - \overline{\alpha}} \times \frac{\overline{\alpha}\overline{w} - 2}{2\overline{w} - \alpha} > 1$$

$$\alpha\overline{\alpha}w\overline{w} - 2\alpha w - 2\overline{\alpha}\overline{w} + 4 > 4w\overline{w} - 2w\alpha - 2\overline{w}\overline{\alpha} + \alpha\overline{\alpha}$$

$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$ より

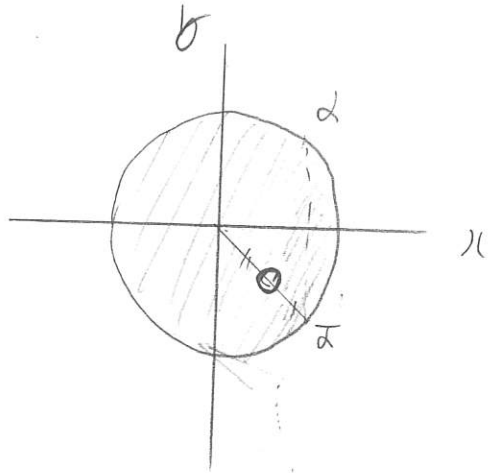
$$w\overline{w} - 2\alpha w - 2\overline{\alpha}\overline{w} + 4 > 4w\overline{w} - 2w\alpha - 2\overline{w}\overline{\alpha} + 1$$

$3w\overline{w} < 3$

$|w| < 1$

よって 原点を中心とした半径1の円の内部

ただし $w = \frac{1}{2}\overline{\alpha}$ を除く



斜線部分。ただし 境界と白丸($\frac{1}{2}\overline{\alpha}$) を除く