2007年 横

4 1から7までの番号が書かれた7枚のカードがある。この中から4枚のカードを同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた4個の数の和から，取り出されなかった3枚のカードに書かれた3個の数の和を引いた値を X とする。

(1) $X = -8$ となる確率を求めよ。

(2) X が負となる確率を求めよ。

(3) X の期待値を求めよ。

(1) 取り出したカードの和 P，残ったカードの和 Q とすると

$$\begin{cases} P - Q = -8 \\ P + Q = \sum_{k=1}^{7} k = \frac{7 \times 8}{2} = 28 \end{cases}$$

$P = 10,\ Q = 18$

4枚の和が10となるのは

$1+2+3+4$ のみ.

よって $P(X=-8) = \dfrac{1}{{}_7C_4} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5}$

$= \dfrac{1}{35}$

(2)
$$\begin{cases} P + Q = 28 & \text{—①} \\ P - Q < 0 & \text{—②} \end{cases}$$

$P \leqq 13,\ Q \geqq 15$

$P = 10, 11, 12, 13$ となるのは

$\underset{10}{(1,2,3,4)}\ \underset{11}{(1,2,3,5)}\ \underset{12}{(1,2,3,6)}\ \underset{12}{(1,2,4,5)}\ \underset{13}{(1,2,4,6)}\ \underset{13}{(1,3,4,5)}$

$\underset{13}{(1,2,3,7)}$

$\therefore P(X<3) = \dfrac{7}{35}$

$Q = 15, 16, 17, 18$ に注目すると (3枚の合計)

Q=18 (5, 6, 7)

Q=17 (4, 6, 7)

Q=16 (3, 6, 7)

(4, 5, 7)

Q=15 (2, 6, 7)

(3, 5, 7)

(4 5 6)

別解 (3) 特定の数 k を取り出す確率は

$\dfrac{{}_6C_3}{35} = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$

よって k について $\frac{4}{7}k - \frac{3}{7}k = \frac{1}{7}k$

$k = 1 \sim 7$ について考えて

$\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7) = \frac{1}{7} \times 8 \times 7 \times \frac{1}{2} = 4$

7 n を奇数とする。次の問いに答えよ。

(1) n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2) n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3) n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。

5

3

(1) n は奇数より

$n=2p+1$ （p は整数）

$n^2-1=(2p+1)^2-1$

$=4p^2+4p$

$=4p(p+1)$

$p(p+1)$ は連続する2つの整数の積より2の倍数

よって　$4p(p+1)$ は8の倍数である。

(2) $n^5-n=n(n^4-1)$

$=n(n^2+1)(n-1)(n+1)$

ここで $(n-1)\times n\times(n+1)$ は連続する3つの整数の積なので 3の倍数

よって n^5-n は3の倍数である。

(3) $120=2^3\times3\times5$

よって n^5-n は8の倍数かつ3の倍数かつ5の倍数であることを示す

$n^5-n=n(n^2+1)(n^2-1)$

(i) よって n^2-1 が (1)より8の倍数なので、n^5-n は8の倍数である

(ii) (2)より n^5-n は3の倍数である

(iii) $n^5-n=n(n^2+1)(n+1)(n-1)$

法を5とし

$n\equiv0$ のとき　$n^5-n\equiv0$ より 5の倍数

$n\equiv1$ のとき　$n^5-n\equiv1-1\equiv0$ 〃

$n\equiv2$ のとき　$n^5-n\equiv32-2\equiv30\equiv0$ 〃

$n\equiv3$ のとき　$n^5-n\equiv243-3\equiv240\equiv0$ 〃

$n\equiv4$ のとき　$n^5-n\equiv1024-4$

$\equiv1020\equiv0$

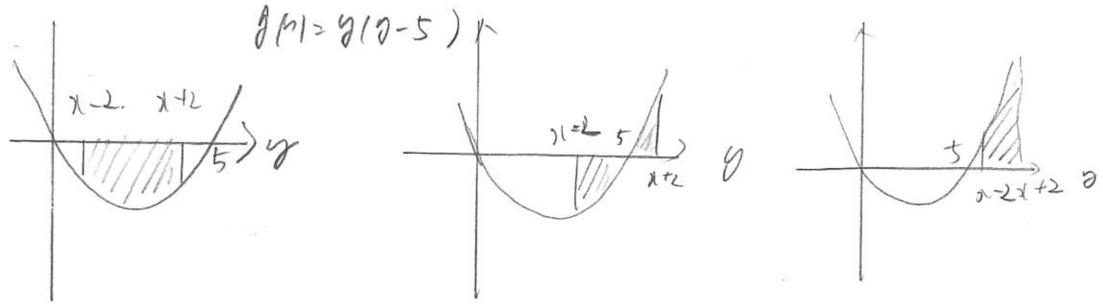
よって 5の倍数

上×上より n^5-n は120の倍数である。

$\boxed{8}$ x の関数

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}|y(y-5)|\,dy$$

の $2 \leqq x$ における最小値を求めよ。



(i) $2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}(-y^2+5y)\,dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{x+2}$$
$$=-\frac{1}{3}\left\{(x+2)^3-(x-2)^3\right\}+\frac{5}{2}\left\{(x+2)^2-(x-2)^2\right\}$$
$$=-\frac{1}{3}(12x^2+16)+\frac{5}{2}\times 8x$$
$$=-4x^2+20x-\frac{16}{3}$$

(ii) $3 \leqq x \leqq 7$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{5}(-y^2+5y)\,dy+\int_{5}^{x+2}(y^2-5y)\,dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{5}+\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2\right]_{5}^{x+2}$$

$$=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}+\frac{1}{3}(x-2)^3-\frac{5}{2}(x-2)^2+\frac{1}{3}(x+2)^3-\frac{5}{2}(x+2)^2-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{2}{3}x^3-5x^2+8x+\frac{65}{3}$$

(iii) $x \geqq 7$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}(y^2-5y)\,dy$$
$$=4x^2-20x+\frac{16}{3}$$

これより

$$f'(x)=\begin{cases}-8x+20 & (2 \leqq x \leqq 3)\\ 2x^2-10x+8 & (3 \leqq x \leqq 7)\\ 8x-20 & (x \geqq 7)\end{cases}$$

よって増減を調べて

x	2		$\frac{5}{2}$		3		4		7	
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+		+
$f(x)$	$\frac{56}{3}$	↗		↘		↘	$\frac{49}{3}$	↗		↗

$$f(2)=-16+40-\frac{16}{3}=24-\frac{16}{3}=\frac{56}{3}$$

$$f(4)=\frac{2}{3}\cdot 64-5\cdot 16+8\cdot 4+\frac{65}{3}$$
$$=\frac{128+65}{3}-48$$
$$=\frac{128+65-144}{3}$$
$$=\frac{49}{3}$$

これより最小値は $\frac{49}{3}$ ($x=4$ のとき)

9 e を自然対数の底とし, $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log_e|x|+\frac{3}{4}$ とする。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で, 互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2) 直線 ℓ は曲線 $y=f(x)$ の接線で, 原点を通りかつ傾きが正とする。ℓ の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$, $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log|x|+\frac{3}{4}$　$(x\neq 0)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

接点の x 座標を $x=s, t$ $(s<t)$ とおくと.

$f'(s)\times f'(t)=-1$

$\frac{1}{4}\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)=-1$

$s>0$ のとき　相加平均相乗平均より

$\begin{cases} s+\frac{1}{s}\geqq 2 \\ t+\frac{1}{t}\geqq 2 \end{cases}$ なので $f'(s)\times f'(t)=-1$

しなるには　$s<0,\ t>0$

このとき　$(-s)+\left(-\frac{1}{s}\right)\geqq 2$ より $s+\frac{1}{s}\leqq -2$

$t+\frac{1}{t}\geqq 2$

に注意すると

$\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)=-4$ となるのは

$s+\frac{1}{s}=-2,\ t+\frac{1}{t}=2$ のときで

$s=-1, t=1$ に限る.

$y=f'(s)(x-s)+f(s)$,
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$
に代入し

よって 2 接線は $(-1,1), (1,1)$ における接線で

$y=-x,\ y=x$

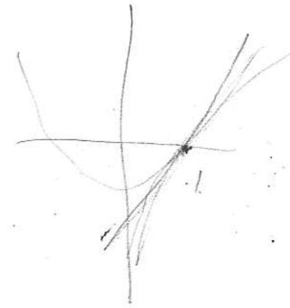
(2) 接点を $\left(t, \frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}\log|t|+\frac{3}{4}\right)$ とすると接線は

$y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)(x-t)+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}\log|t|+\frac{3}{4}$　—①

これが $(0,0)$ を通るので, 代入し

$-\frac{1}{2}(t^2+1)+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}\log|t|+\frac{3}{4}=0$

$\frac{1}{2}\log|t|=\frac{1}{4}(t^2-1)$



$t<0$ のとき $f'(t)<0$ となるので $t>0$

∴ $\log t=\frac{1}{2}(t^2-1)$

曲線 $\log t$, 曲線 $\frac{1}{2}(t^2-1)$ は

$(1,0)$ を共有し, $p'(t)=\frac{1}{t}$, $q'(t)=t$ で $p'(1)=q'(1)$

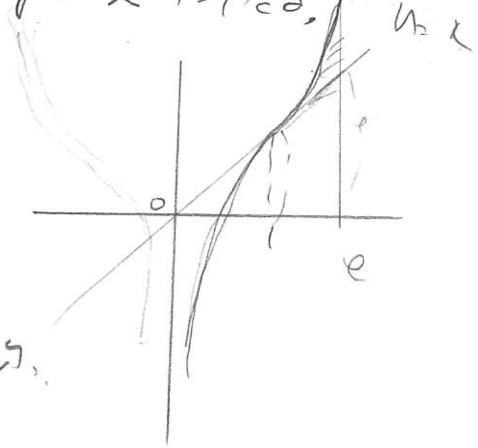
なので $(1,0)$ で共通の接線をもち, 凹凸の異なる曲線なので,

$t=1$ 以外に解をもたない

よって ℓ は①に $t=1$ を代入し $y=x$ に限る.

(3)

x	0	
$f'(x)$	×	+
$f(x)$		$-\infty$ ↗ (∞)



$f(-x)=f(x)$ より, $f(x)$ は y 軸に対称.

$\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}(x\log x-x)+\frac{3}{4}x\right]_1^e$

$=\frac{1}{12}e^3+\frac{3}{4}e-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{12}e^3+\frac{3}{4}e-\frac{1}{3}$

∴ $\frac{1}{12}e^3+\frac{3}{4}e-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1+e)(e-1)$

$=\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{4}e+\frac{1}{6}$

10 媒介変数表示 $x=\cos\theta$, $y=\cos^2\theta\cdot\tan\frac{\theta}{2}$ (ただし, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$) が表す曲線を C とする。

(1) y を最大にする θ の値を α とするとき, $\cos\alpha$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=\cos^2\theta\tan\frac{\theta}{2}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{dy}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=-2\cos\theta\sin\theta\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos^2\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

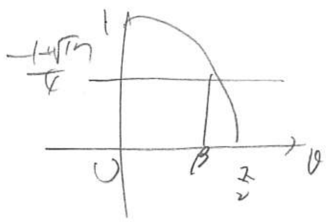
$$=\frac{-4\cos\theta\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$(1-\cos$

$$=\frac{\cos\theta(\cos\theta-2\sin^2\theta)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}(2\cos^2\theta+\cos\theta-2)$$

$\frac{dy}{d\theta}\geqq0$ となるとき $\cos\theta\leqq\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\leqq\cos\theta$



$\cos\beta=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

とおく

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0		
y		↗		↘	

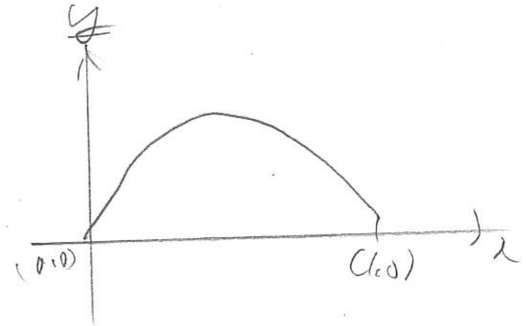
$\theta=\alpha=\beta$ で最大

$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ //

(2) (1) および $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$ より

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
(x,y)	$(1,0)$	↖		↙	$(0,0)$

C の概形は



これより

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\tan\frac{\theta}{2}\cdot(-\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$$ //