2008年千葉

5 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2) a，b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。

(1) xは有理数だから $x=\dfrac{n}{m}$ （m, nは互いに素な整数）$m>0$ とおくと，

$$7x^2=\frac{7n^2}{m^2}=k\ (k\text{は整数})$$ とおけて，

m^2とn^2は互いに素なので

m^2が7の約数となり，$m=1$に限る

よって $x=\dfrac{n}{m}=n$ となり xは整数である。

(2) a, bを整数とする。

a^2-7b^2が4の倍数のとき a, bの偶奇は一致する

そこで a, b ともに奇数と仮定すると

$a=2s-1$，$b=2t-1$ （$s, t\in$整数）とおいて

$$\begin{aligned}a^2-7b^2&=(2s-1)^2-7(2t-1)^2\\&=4s^2-4s+1-7(4t^2-4t+1)\\&=4s^2-4s-28t^2+28t-6\end{aligned}$$

◇M4(668—47)

$$=4(s^2-s-7t^2+7t-2)+2$$

s^2-s-7t^2+7t-2は整数 より これは4の倍数にならず矛盾，よって a, bはともに偶数である

法を2とし

$a\equiv 1$，$b\equiv 0$ のとき $a^2-7b^2\equiv 1$

$a\equiv 0$，$b\equiv 1$ のとき $a^2-7b^2\equiv -7\equiv 1$

よって a, bは偶奇一致する 次に法を4とし

$a\equiv 1$，$b\equiv 1$，のとき $a^2-7b^2\equiv 1-7\equiv -6\equiv 2$

$a\equiv 1$，$b\equiv 3$ のとき $a^2-7b^2\equiv 1-63\equiv \underbrace{-62\equiv 2}_{+64}$

$a\equiv 3$，$b\equiv 1$ のとき a^2-7b^2

$\equiv 9-7\equiv 2$

$a\equiv 3$，$b\equiv 3$ のとき $a^2-7b^2\equiv 9-63\equiv \underbrace{-54\equiv 2}_{+56}$

よって a, bが奇数のとき，a^2-7b^2は4の倍数にならないので

a, bはともに偶数である

〃 今(3)の方が早い

---

(3) $r\in$整数，$s\in$有理数 とする

$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば これを mとおいて

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2-7s^2=m$$

$$\Leftrightarrow\ r^2-7(2s)^2=4m \quad \cdots ※$$

$7(2s)^2=r^2-4m\in$整数（$\because r, m$整数）だから

(1)より $2s$は整数であり，

※で r，$(2s)$が整数であり，$4m$は4の倍数だから

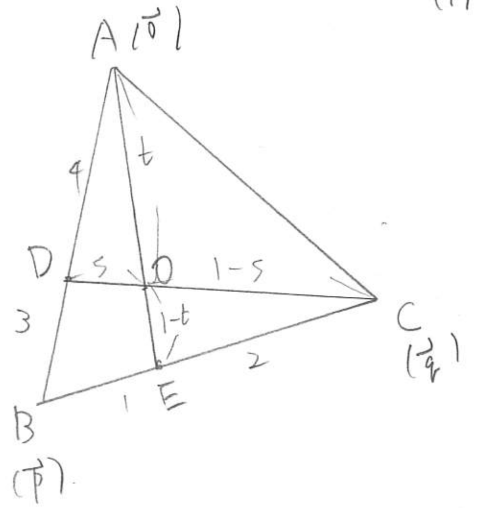
r，$2s$はともに偶数である

$2s$が偶数だから，sは整数である。

7 平面上の △ABC において，辺 AB を 4 : 3 に内分する点を D，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$ で表せ。

(2) 点 O が △ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB，BC，CA の長さの 2 乗の比を求めよ。



(1) AO : OE = t : 1−t, DO : OC = s : 1−s とおく

$\overrightarrow{AO} = t\overrightarrow{AE}$

$= t\left(\frac{2}{3}\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{q}\right)$ …①

$\overrightarrow{AO} = (1-s)\cdot\frac{4}{7}\vec{p} + s\vec{q}$ …②

①,②で $\vec{p}$, $\vec{q}$ は一次独立より

$\begin{cases} \frac{2}{3}t = \frac{4}{7}(1-s) \\ \frac{1}{3}t = s \end{cases}$

これを解いて

$t=\frac{2}{3}$, $s=\frac{1}{9}$

①に代入

$\underline{\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q}}$ //

(2) $|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{CO}|^2 = |\overrightarrow{BO}|^2$ が成り立つので

(1)より

$|\overrightarrow{AO}|^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2|2\vec{p}+\vec{q}|^2$

$= \frac{4}{81}(4|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2) = \frac{1}{81}(16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2)$ —①

$|\overrightarrow{BO}|^2 = |\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|^2$

$= \left|-\frac{5}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}\right|^2$

$= \frac{1}{81}(25|\vec{p}|^2-20\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2)$ —②

$|\overrightarrow{CO}|^2 = |\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}|^2$

$= \left|\frac{4}{9}\vec{p}-\frac{7}{9}\vec{q}\right|^2$

$= \frac{1}{81}(16|\vec{p}|^2-56\vec{p}\cdot\vec{q}+49|\vec{q}|^2)$ —③

①②③より

$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2 = 25|\vec{p}|^2-20\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2$ —④

$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2 = 16|\vec{p}|^2-56\vec{p}\cdot\vec{q}+49|\vec{q}|^2$ —⑤

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9|\vec{p}|^2-36\vec{p}\cdot\vec{q}=0 \\ 72\vec{p}\cdot\vec{q}=45|\vec{q}|^2 \end{cases}$ $\quad |\vec{p}|^2 = 4\vec{p}\cdot\vec{q}$, $|\vec{q}|^2 = \frac{8}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$AB^2 = |\vec{p}|^2 = 4\vec{p}\cdot\vec{q}$

$BC^2 = |\vec{q}-\vec{p}|^2 = |\vec{q}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2$

$= \left(\frac{8}{5}-2+4\right)\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= \frac{18}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$CA^2 = |\vec{q}|^2 = \frac{8}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}$

よって $AB^2 : BC^2 : CA^2 = 4 : \frac{18}{5} : \frac{8}{5}$

$= 20 : 18 : 8$

$\underline{= 10 : 9 : 4}$ //

8 1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し，その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し，1 つがこれと異なる場合には，2 つの同じ値を X とし，3 つとも同じならその値を X とする。

(1) 確率 $P(X \leqq k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(X = k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ を求めよ。

(3) $P(X = k)$ が最大となる k の値はいくつか。

k以下の当い 3つ同じ

(1) $X \leqq k$ となるのは，

(i) 3つとも k以下

(ii) 2つが k以下，他の1つがkより大

2つが一致し，1つがこれと異なり $X \leqq k$ となるのは (i) または (ii) に含まれる

よって $P(X \leqq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{n-k}{n}\right)$

$= \dfrac{k^3 + 3k^2(n-k)}{n^3}$

$= \dfrac{k^2(3n-2k)}{n^3}$

$k \geqq 2$ のとき

(2) $P(X=k) = P(X \leqq k) - P(X \leqq k-1)$

$= \frac{1}{n^3}\{3nk^2 - 2k^3 - 3n(k-1)^2 + 2(k-1)^3\}$

$= \frac{1}{n^3}\{3nk^2 - 2k^3 - 3n(k^2-2k+1) + 2(k^3-3k^2+3k-1)\}$

$= \frac{1}{n^3}(6nk - 3n - 6k^2 + 6k - 2)$

$= \frac{1}{n^3}\{-6k^2 + (6+6n)k - 3n - 2\}$

これは $k=1$ のとき $\frac{1}{n^3}(-6+6+6n-3n-2) = \frac{1}{n^3}(3n-2)$ となるから

(1)より $n>1$ で成立する

(3) 分子 $-6k^2 + (6+6n)k - 3n - 2$ を最大とする k を求める

軸 $k = \dfrac{-6-6n}{-12} = \dfrac{1+n}{2}$ となる 上に凸な放物線

k は整数だから

n が奇数のときは $k = \dfrac{1+n}{2}$ で最大

n が偶数のときは $k = \dfrac{n}{2}, \dfrac{n+2}{2}$ で最大

$X \leqq k$ 　 $1 \sim k \sim n$

3個とも異なるときは $a < X < c$ →

3個目以下 ${}_kC_3 \times 3! = k(k-1)(k-2)$

2個目以下 ${}_kC_2 \times (n-k) \times 3! = 3k(k-1)(n-k)$

2個同じ $XX\,c$ → $k \times 1 \times (n-1) \times 3$

3つ同じ XXX → k

$k^3 - 3k^2 + 2k + 3k(nk - k^2 - n + k) + 3kn - 3k + k$

$= \cancel{k^3} - \cancel{3k^2} + \cancel{2k} + 3nk^2 - \cancel{3k^3} - \cancel{3nk} + \cancel{3k^2} + \cancel{3kn} - \cancel{2k}$

$= -2k^3 + 3nk^2$

11 実数 a, b は $0<a<b$ を満たし, x, y, z はいずれも a 以上かつ b 以下であるとする。このとき次を示せ。

(1) $x+y=a+b$ ならば, $xy \geqq ab$ である。

(2) $x+y+z=a+2b$ ならば, $xyz \geqq ab^2$ である。

(1) $0<a<b$, $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$, $a \leqq z \leqq b$.

$x=a+b-y$ を代入し

$$\begin{aligned} xy-ab &= (a+b-y)\cdot y-ab \\ &= ay+by-y^2-ab \\ &= a(y-b)-y(y-b) \\ &= (a-y)(y-b) \end{aligned}$$

低次の a で整理

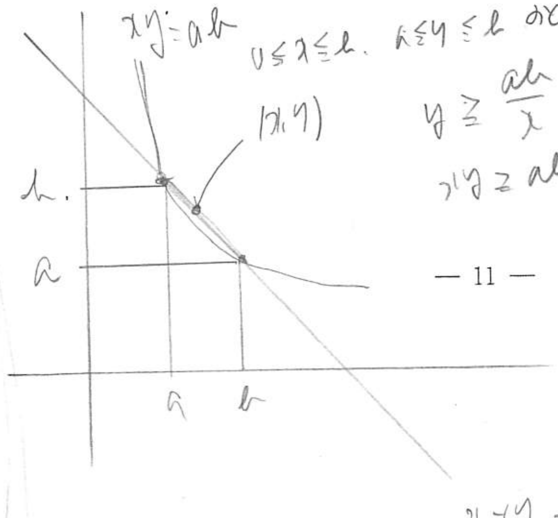
$a \leqq y \leqq b$ より $a-y \leqq 0$, $y-b \leqq 0$

よって $(a-y)(y-b) \geqq 0$

すなわち $xy-ab \geqq 0$ だから

$xy \geqq ab$

が成立する。



$a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ のとき, $y \geqq \frac{ab}{x}$ を満たす領域内の点 (x,y) より.

$xy \geqq ab$

(1)の図形的意味

(1) 別解

$x+y=a+b$　$y-a=b-x$

$x-a=b-y$ を利用すると

$$\begin{aligned} xy-ab &= xy-ax+ax-ab \\ &= x(y-a)-a(b-x) \\ &= x(y-a)-a(y-a) \\ &= (y-a)(x-a) \geqq 0 \end{aligned}$$

どちらでも

$$\begin{aligned} &xy-bx+bx-ab \\ &= x(y-b)+b(x-a) \\ &= x(y-b)+b(b-y) \\ &= (b-y)(b-x) \geqq 0 \end{aligned}$$

(2) $yz \geqq ab$ を示す。

$x+y+z=(a+b)+b$

$y+z=(a+b)+(b-x) \geqq a+b$

$\Longleftrightarrow y-a \geqq b-z$

$$\begin{aligned} yz-ab &= (y-a)z+az-ab \\ &= (y-a)z-a(b-z) \\ &\geqq (b-z)z-a(b-z)=(b-z)(z-a) \geqq 0 \end{aligned}$$

$yz-ay+ay-ab$

$=y(z-a)-a(b-y)$

このとき,

$$\begin{aligned} xyz-ab^2 &= xyz-ayz+ayz-ab^2 \\ &= (x-a)yz-a(b^2-yz) \end{aligned}$$

$x-a=b-y+b-z$

$$\begin{aligned} &= \{(b-y)+(b-z)\}yz-a(\underbrace{b^2-by+by-yz}_{b(b-y)-y(z-b)}) \\ &= \{(b-y)+(b-z)\}yz-ab(b-y)-ay(b-z) \\ &= (b-z)(z-a)y+(b-y)(yz-ab) \geqq 0 \end{aligned}$$

よって $xyz \geqq ab^2$ は成り立つ

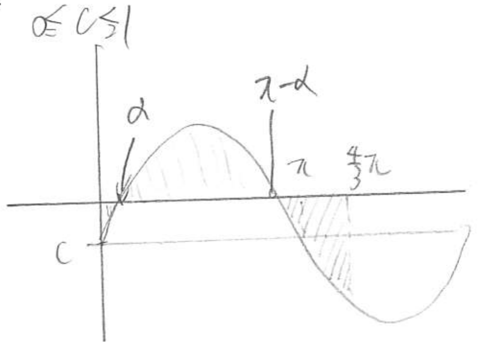
12 $c \geqq 0$ に対して，連立不等式

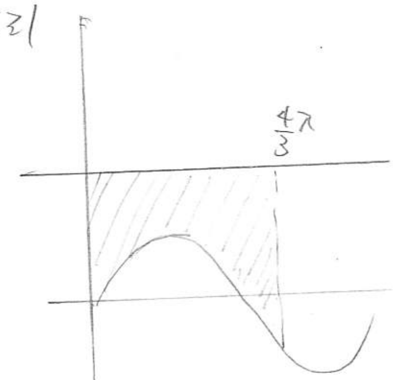
$$0 \leqq x \leqq \frac{4\pi}{3}, \quad 0 \leqq y \leqq |\sin x - c|$$

で表される座標平面上の図形を A とする。

(1) A の面積 S を最小にするような c の値と，そのときの S を求めよ。

(2) A を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする。V を最小にするような c の値と，そのときの V を求めよ。





$0 \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi$,

$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq |\sin x - c|\}$ の面積は，

$0 \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi$ で $y = \sin x - c$ と x 軸とで囲まれた面積を求める.

$c \geqq 1$ では単調に増加するので $0 \leqq c \leqq 1$ で考えればよい.

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $\sin x - c = 0$ をみたす $x = \alpha$ とする ($\sin\alpha = c$)

$$S = \int_0^{\alpha}(-\sin x + c)\,dx + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(\sin x - c)\,dx + \int_{\pi-\alpha}^{\frac{4}{3}\pi}(-\sin x + c)\,dx$$

$$= \left[\cos x + cx\right]_0^{\alpha} + \left[-\cos x - cx\right]_{\alpha}^{\pi-\alpha} + \left[\cos x + cx\right]_{\pi-\alpha}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= \cos\alpha - 1 + c\alpha + \cos\alpha - c(\pi - \alpha) + \cos\alpha + c\alpha + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}\pi c + \cos\alpha - c(\pi - \alpha)$$

$$= 4\cos\alpha - \frac{3}{2} + 4c\alpha - 2c\pi + \frac{4}{3}\pi c$$

$$= 4\cos\alpha - \frac{3}{2} + \left(4\alpha - 2\pi + \frac{4}{3}\pi\right)c$$

$$= 4\cos\alpha - \frac{3}{2} + \left(4\alpha - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\alpha$$

$0 \leqq c \leqq 1$ のとき $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \cancel{-4\sin\alpha} + \cancel{4\sin\alpha} + \left(4\alpha - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\alpha$$

$$= \left(4\alpha - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\alpha$$

$0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ で $\cos\alpha \geqq 0$ より

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		↘	最小	↗	

$c = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ で

最小値

$$4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\right)\frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

(2)

$$V = \pi\int_0^{\frac{4}{3}\pi}|\sin x - c|^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{4}{3}\pi}(\sin^2 x - 2c\sin x + c^2)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{4}{3}\pi}\left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - 2c\sin x + c^2\right)dx$$

$$= \pi\left\{\left(c^2 + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{4}\sin 2x + 2c\cos x\right\}_0^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= \pi\left(c^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2c\pi\left(-\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \pi\left(c^2 + \frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi - 3c\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2 c^2 - 3c\pi + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2\left(c^2 - \frac{9}{4\pi}c\right) + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2\left(c - \frac{9}{8\pi}\right)^2 - \frac{4}{3}\pi^2 \times \frac{81}{64\pi^2} + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2\left(c - \frac{9}{8\pi}\right)^2 - \frac{27}{16} + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$c = \frac{9}{8\pi}$ で最小値 $V = -\frac{27}{16} + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$