2010年 千葉 解答

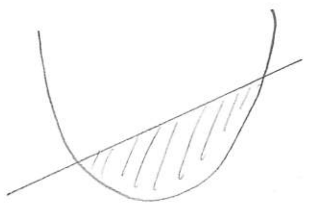
5 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax + b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a = 0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) a, b が共に整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。



$a=0$ のとき

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = b \end{cases}$ の交点は $x = \pm\sqrt{b}$ $(b>0)$

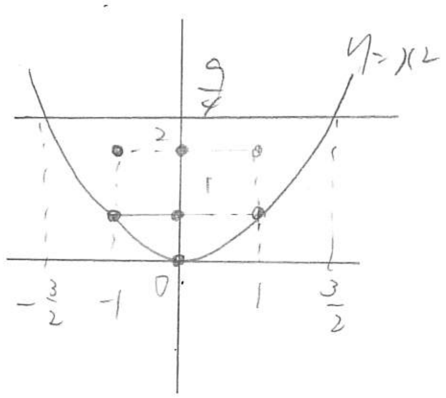
面積が $\dfrac{9}{2}$ より

$-\displaystyle\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (x-\sqrt{b})(x+\sqrt{b})\,dx = \dfrac{1}{6}(2\sqrt{b})^3$

$= \dfrac{4}{3} b^{\frac{3}{2}} = \dfrac{9}{2}$

$b^{\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$

$b = \dfrac{9}{4}$



よって格子点は

$(-1,1)(-1,2)(0,0)(0,1)(0,2)(1,1)(1,2)$

以上 7個となる。

◇M4(852—45)

(2) 面積が $\dfrac{9}{2}$ より

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax+b \end{cases}$ の交点を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$S = -\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$= \dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \dfrac{9}{2}$

$\therefore \beta - \alpha = 3$ …①

ただし $x^2 - ax - b = 0$ の2解が α, β より解と係数の関係より $\begin{cases} \alpha+\beta = a & \text{…②} \\ \alpha\beta = -b & \text{…③} \end{cases}$

①,②より $a = \alpha+\beta = 2\alpha+3$ …④

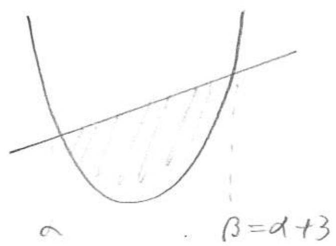
③より $b = -\alpha\beta$

$= -\alpha(\alpha+3)$ …④'

α を消去し $b = -\dfrac{a-3}{2}\cdot\dfrac{a+3}{2} = -\dfrac{a^2-9}{4}$ …⑤

整数 a が偶数だと⑤より b は整数にならないので a は奇数，このとき④より α は整数となる

α が整数なら④'より b も整数となる



$x^2 \leqq y \leqq ax+b$ に含まれる格子点の個数は

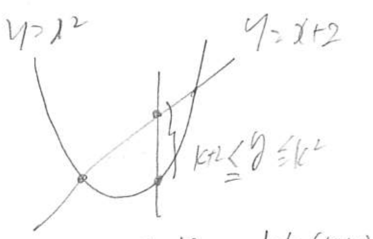
$x^2-ax-b \leqq y \leqq 0$ に含まれる格子点と等しく

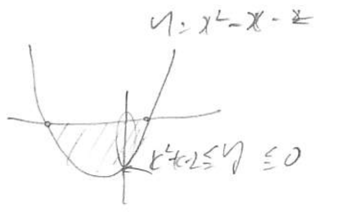
$(x-\alpha)(x-\alpha-3) \leqq y \leqq 0$ 〃

x 方向に $-\alpha$ 平行移動し（α が整数だから）

$x(x-3) \leqq y \leqq 0$ に含まれる格子点の個数に等しく，よって一定である。

(2)





$k^2-(k+2)+1$

$=k^2-k-1$

コ

$k^2-k-2+1$

$=k^2-k-1$

コ

6 数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に1移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に1移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1) $X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2) $X(1)\neq 0,\ X(2)\neq 0,\cdots,X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

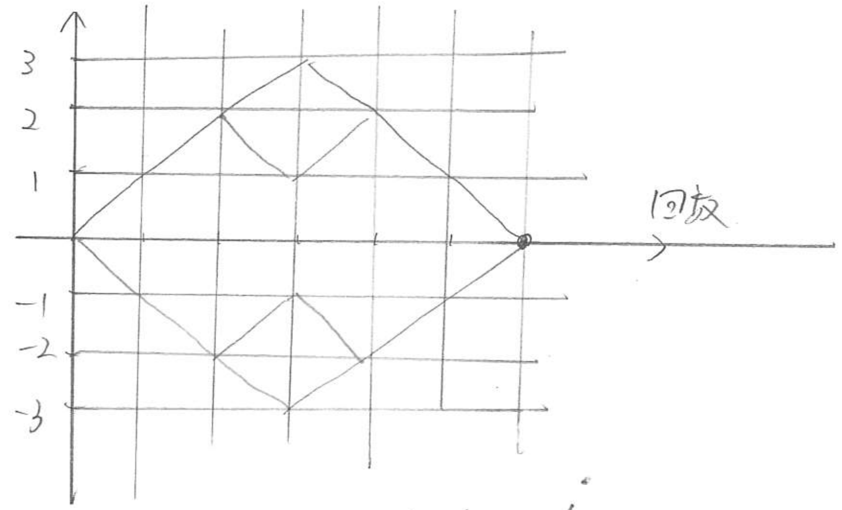
(3) $X(1)\neq 0,\ X(2)\neq 0,\cdots,X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

(1) 10回のうち、奇数、偶数がそれぞれ5回ずつ出る確率を求めて、

$$ {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3\cdot2\cdot7\cdot6}{2^{10}} $$

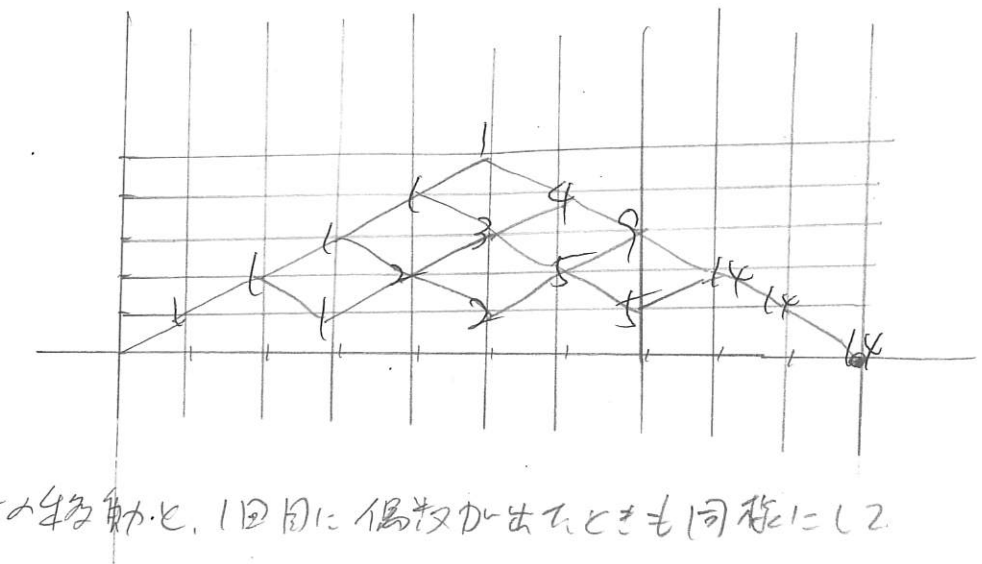
$$ = \frac{63}{2^8} $$

$$ = \frac{63}{256} $$



上の移動より、 $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

(3)



上の移動と、1回目に偶数が出たときも同様にして

$$ 28\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{2^2\times7}{2^{10}} $$

$$ = \frac{7}{2^8} $$

$$ = \frac{7}{256} $$

9 a を1より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0,0)，A(1,0) をとる。

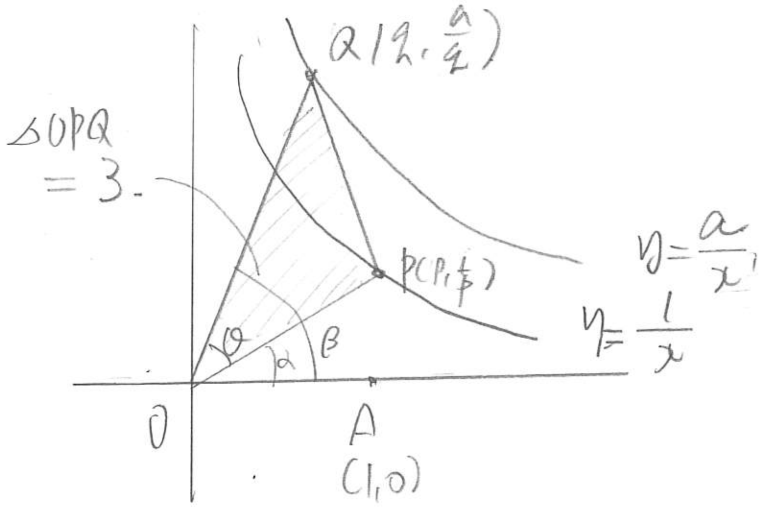
曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3条件

(1) $p>0,\ q>0$

(2) $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は3に等しい

をみたしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。



$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$, $\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ とおくと $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ より

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{a}{q^2}}{1+\dfrac{a}{p^2q^2}}$$
$$=\frac{q^2-p^2a}{p^2q^2+a}\leqq\frac{3}{4}\cdots①$$

$\triangle POQ=3$ より

$$\frac{1}{2}\left|\frac{a}{p}-\frac{ap}{q}\right|=3$$

$$\frac{|q^2-ap^2|}{pq}=6\cdots②$$

① より $q^2-ap^2>0$ だから

② より $\dfrac{q^2-ap^2}{pq}=6\cdots②'$

②' より $q^2-ap^2=6pq$ を①に代入し 相加平均と相乗平均を用いると

$$\frac{6(pq)}{(pq)^2+a}=\frac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\frac{6}{2\sqrt{a}}=\frac{3}{\sqrt{a}}$$

等号は $pq=\sqrt{a}$ のときに成りたつので，

最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

この値が $\dfrac{3}{4}$ だから

$$\frac{3}{\sqrt{a}}=\frac{3}{4}$$

よって $a=16$

$\boxed{10}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

(2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

(1) $3^n = (k+1)(k^2-k-1)$

$$\begin{cases} k+1 = 3^l & \cdots ① \\ k^2-k+1 = 3^{n-l} & \cdots ② \ (0 \leq l \leq n) \end{cases}$$

①を②に代入しkを消去すると

$(3^l-1)^2 - (3^l-1) + 1 = 3^{n-l}$

$3^{2l} - 2\cdot 3^l + 3 - 3^l = 3^{n-l}$

$3^{2l} - 3^{l+1} + 3 = 3^{n-l}$

$3^{2l-1} - 3^l + 1 = 3^{n-l-1}$ ← $3^{2l-1}-3^l \neq 0$ と仮定すると 左辺が3で割ると1余り 右辺が3で割りきれるので矛盾する。

これが成立するのは、

$$\begin{cases} 2l-1 = l \\ n-l-1 = 0 \end{cases}$$

$\therefore l = 1,\ n = 2,\ k = 2$

より $\underline{(k, n) = (2, 2)}$ //

(2)

$3^n = k^2 - 40 \cdots ③$

$m = 0, 1, 2 \cdots$ として

3^n の1の位は $3, 9, 7, 1$ $(n = 4m+1, 4m+2, 4m+3, 4m)$

$k^2 = 3^n + 40$ より k^2 の1の位が $3^n + 40$ の1の位と等しい。

k^2 の1の位は $k = 1, 2, \ldots 10$ に対し

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 なので、

1の位が一致するには $n = 4m+2$ または $n = 4m$ である

2, 4, 6, 8 . . .

すなわち $n = 2l$ $(l = 1, 2, 3 \ldots)$ とおけて、

$3^{2l} = k^2 - 40 \cdots ④$

$(k+3^l)(k-3^l) = 40$

$(k+3^l) - (k-3^l) = 2\cdot 3^l < 40$ だから

$3^l < 20$ より $l = 1, 2$ が必要

$l = 1$ のとき ④より $k = 7$. ③より $n = 2$

$l = 2$ のとき ④より $k = 11$. ③より $n = 4$

以上より $(k, n) = (11, 4), (7, 2)$

④~別解

$(k+3^l) - (k-3^l) = 2\cdot 3^l \in$ 偶より

$k+3^l,\ k-3^l$ は偶奇一致し、$40 \in$ 偶より

ともに偶数

$(k+3^l)+(k-3^l) = 2k \in$ 偶

$k+3^l > k-3^l$ かつ $k+3^l > 0$ に注意すると

$(k+3^l, k-3^l) = \cancel{(40, 1)}\ (20, 2)\ (10, 4)$

よって $(k, n) = (11, 2), (7, 4)$

11 $f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件 (P) を考える。

(P) 正の実数 r を十分小さく選べば，$|x-a|<r$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つ。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a が条件 (P) をみたし，かつ，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)=0$ であることを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} |x|-x & (x<1 \text{ のとき}) \\ |x^2-6x+8| & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき，条件 (P) をみたすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3) 一般に，実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の命題は正しいか。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ。

（命題）すべての実数 a が条件 (P) をみたすならば，$f(x)$ は定数関数である。

(1) $x=a$ で微分可能ならば

$$f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

と表わすことが出来て，

$x\to a+0$ のとき $x-a>0$ かつ $f(x)-f(a)\leqq 0$ より

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqq 0$$

より $f'(a)\leqq 0$

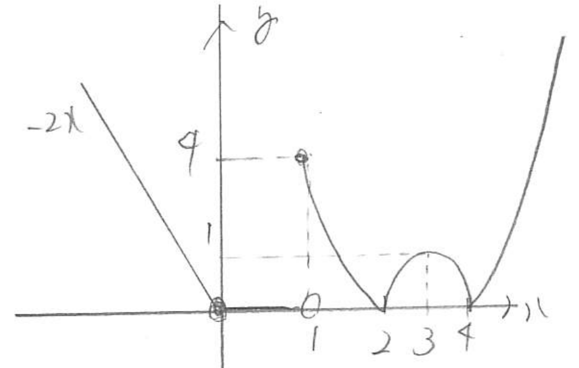
$x\to a-0$ のとき $x-a<0$ かつ $f(x)-f(a)\leqq 0$ より

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqq 0$$

より $f'(a)\geqq 0$

以上より $0\leqq f'(a)\leqq 0$ だから $f'(a)=0$ である。

(2)
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0\leqq x<1) \\ -2x & (x<0) \\ (x-2)(x-4) & (1\leqq x\leqq 2) \\ -(x-2)(x-4) & (2<x<4) \\ (x-2)(x-4) & (4\leqq x) \end{cases}$$



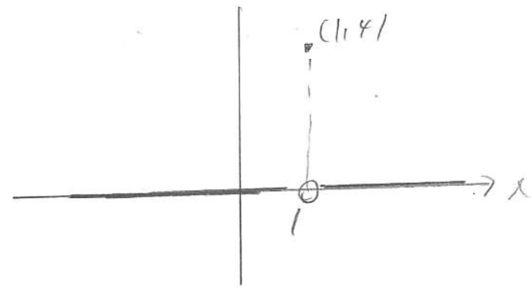
グラフより $|x-a|<r$ ← x と a が近傍の2点のとき

$f(x)\leqq f(a)$ ← $f(a)$ の値より近くの点 x における $f(x)$ が $f(a)$ より大きい値をとらなければよい

グラフより $\underline{0<a\leqq 1,\ a=3}$

(3) 正しくない。

(反例) $f(x)=\begin{cases} 4 & (x=1) \\ 0 & (x\neq 1) \end{cases}$



とすると，

(P)を満たすが，これは定数関数ではない

(もっと詳しく)

$a=1$ のとき，任意の x に対し $f(x)\leqq 4$，$f(1)=4$ より $f(x)\leqq f(a)$ が成立する。

$a\neq 1$ のとき $f(a)=0$，r を十分小さく選ぶならば $|x-a|<r$ をみたす全ての x で $f(x)=0$ より $f(x)\leqq f(a)$ が成立する。