

千葉大学医学部 2001年 数学 (追加問題含む)

**3**  $a, b$  を整数とする。3次関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$  が、 $0 < x < 2$  の範囲で極大値と極小値をもつとき、 $a, b$  の値を求めよ。



5  $C$  は、2次関数  $y = x^2$  のグラフを平行移動した放物線で、頂点が円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上にある。原点から  $C$  に引いた接線で傾きが正のものを  $l$  とおく。このとき、 $C$  と  $l$  の接点の  $x$  座標が最大および最小になるときの  $C$  の頂点の座標をそれぞれ求めよ。



6  $a, b$  を実数,  $e$  を自然対数の底とする。すべての実数  $x$  に対して

$e^x \geq ax + b$  が成立するとき, 以下の問いに答えよ。

(1)  $a, b$  の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax - b) dx$$

の最小値と, そのときの  $a, b$  の値を求めよ。



7 数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  を次のように定義する。

$$a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数  $n$  に対して

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$





8 30 の階乗  $30!$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $2^k$  が  $30!$  を割り切るような最大の自然数  $k$  を求めよ。
- (2)  $30!$  の一の位は  $0$  である。ここから始めて十の位、百の位と順に左に見ていく。最初に  $0$  でない数字が現れるまでに、連続していくつの  $0$  が並ぶかを答えよ。
- (3) (2) において、最初に現れる  $0$  でない数字は何であることを理由とともに答えよ。



9 - [ア]  $i$  を虚数単位とし、複素数  $z$  に共役な複素数を  $\bar{z}$  で表す。

(1)  $a$  を実数の定数とする。条件

$$1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$$

を満たす複素数平面上の点  $z$  の全体が直線であるとき、 $a$  の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数  $\alpha$  に対して、3点  $0, 1, \alpha$  を通る複素数平面上の円の中心を  $\beta$  とする。このとき、 $\beta$  を  $\alpha$  と  $\bar{\alpha}$  を用いて表せ。

(3)  $\alpha, \beta$  を (2) の複素数とする。点  $\alpha$  が (1) の直線上を動くとき、 $\frac{\beta}{\alpha}$  は一定であることを証明せよ。







