原 1次 領

3 a, b を整数とする。3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。

$f(x) = x^3+ax^2+2bx$

$f'(x) = 3x^2+2ax+2b$

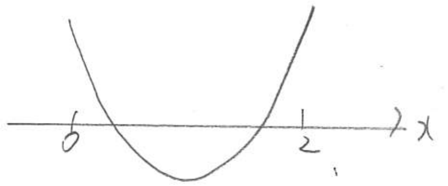
$f(x)$ が $0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつ

⇔ $f'(x)=0$ をみたす x が $0<x<2$ の範囲に異なる2つの解をもつ

$g(x) = 3x^2+2ax+2b$ とおく

$y=g(x)$ のグラフが次のように x 軸と交わる

このときの条件は



$g(0)=2b>0$ …①

$g(2)=4a+2b+12>0$ …②

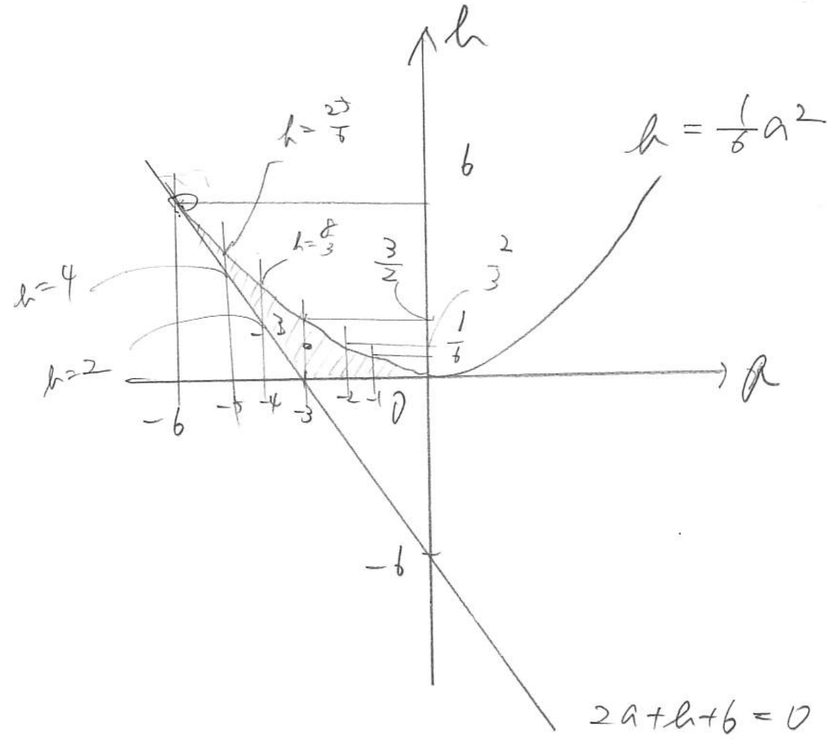
軸 $x = \frac{-2a}{6} = -\frac{a}{3}$ より

$0 < -\frac{a}{3} < 2$ …③

$g(x)=0$ の判別式を D とすると

$D/4 = a^2-6b>0$ …④

領域を図示する



$\begin{cases} b=\frac{1}{6}a^2 \\ b=-2a-6 \end{cases}$ より

$\frac{1}{6}a^2=-2a-6$

$a^2+12a+36=0$

$(a+6)^2=0$

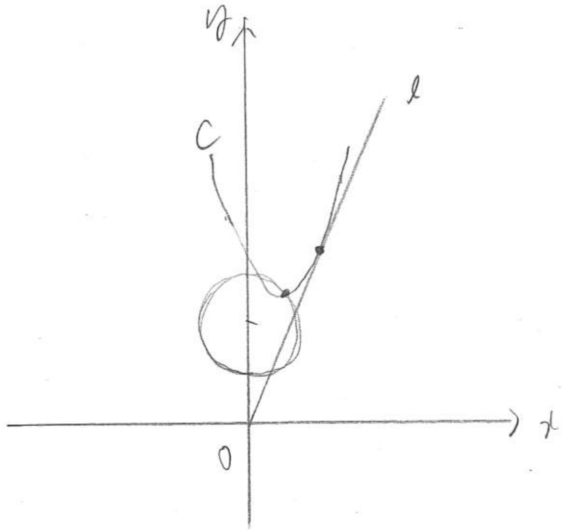
よって $a=-6$ で接する

この範囲に存在する整数 (a, b) は

$(a, b)=(-3, 1)$

座 次依

5 C は，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき，C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。



Cの頂点は $x^2+(y-2)^2=1$ 上にあるので

$(\cos\theta,\ 2+\sin\theta)$ とおけて，

$y=x^2$ を平行移動したものだから C は，

$$y=(x-\cos\theta)^2+2+\sin\theta$$

とおける。$l:\ y=mx\ (m>0)$ が C と接するので

$$(x-\cos\theta)^2+2+\sin\theta=mx$$

$$x^2-(m+2\cos\theta)x+\cos^2\theta+2+\sin\theta=0 \ \cdots ①$$

が重解をもつので判別式をDとすると

$$D=(m+2\cos\theta)^2-4(\cos^2\theta+2+\sin\theta)$$

$$=m^2+4m\cos\theta-8-4\sin\theta=0$$

$m>0$ より

$$m=-2\cos\theta+\sqrt{4\cos^2\theta+8+4\sin\theta}$$

このとき，接点の x 座標は①の重解だから

$$x=\frac{m+2\cos\theta}{2}=\frac{\sqrt{4\cos^2\theta+8+4\sin\theta}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{-4\sin^2\theta+4\sin\theta+12}}{2}$$

$$=\sqrt{-\sin^2\theta+\sin\theta+3}$$

$$\leqq\sqrt{-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}}$$

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ より

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき 最大値 $x=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\sin\theta=-1$ のとき 最小値 $x=0$ をとるので

そのときの，Cの頂点は

最大となるとき $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

最小となるとき $(0,\ 1)$

原 必須

6 a, b を実数，e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x \geqq ax+b$ が成立するとき，以下の問いに答えよ。

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax - b)dx$$

の最小値と，そのときの a, b の値を求めよ。

(1) $f(x) = e^x - ax - b$ とおく

$a<0$ のとき

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ なので すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 0$ は

成立しないので，$a \geqq 0$ が必要

このとき，$a>0$ のとき

$f'(x) = e^x - a$ より

直数条件があるのに場合分けで $a \geqq 0$ とは出来ない

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(\log a) = a - a\log a - b$

すべての x に対して $f(x) \geqq 0$ となる条件は $f(\log a) \geqq 0$ より

$a(1-\log a) \geqq b \quad (a>0) \cdots ①$

$a=0$ のとき，$f(x) = e^x - b \geqq 0$ が全ての実数 x に対して成立する条件は $b \leqq 0$

以上より 求める条件は

(答) $\begin{cases} b \leqq a(1-\log a) & (a>0) \\ b \leqq 0 & (a=0) \end{cases}$

(2) $I = \int_0^1 (e^x - ax - b)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}ax^2 - bx\right]_0^1$

$= e - \frac{1}{2}a - b - 1$

(i) $a=0$ のとき $I = e - 1 - b \ (b \leqq 0)$ より

$a=0,\ b=0$ のとき 最小値 $e-1$

(ii) $a>0$ のとき，

$I = e - \frac{1}{2}a - 1 - b$

$\geqq e - \frac{1}{2}a - 1 - a + a\log a$

$= e - 1 - \frac{3}{2}a + a\log a$

$\frac{d}{da}I = -\frac{3}{2} + \log a + 1$

$= -\frac{1}{2} + \log a$ より

a	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
I'	$-$	0	$+$
I	$\searrow$	$e-1-\sqrt{e}$	$\nearrow$

$e - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{e} + \sqrt{e} \times \frac{1}{2}$

$e - 1 - \sqrt{e}$

$e-1 > e-1-\sqrt{e}$ だから

以上より 最小値は

$e-1-\sqrt{e}$ そのとき $(a, b) = \left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

7 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を次のように定義する。

$$a_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

(1) $a_{n+1} = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = t$ とおくと

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}} - \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}} - \frac{2}{\tan 2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{2}{\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{1-t^2}{t}$$

$$= t$$

これより

$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$ が成り立つ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} a_k$

十分大きい n に対して、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} a_k = \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \frac{1}{2^3}a_3 + \cdots + \frac{1}{2^n}a_n\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{2}{a_1}\right) + \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{a_3} - \frac{2}{a_2}\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{a_4} - \frac{2}{a_3}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{a_2} + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{a_3}$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{2^n a_n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$\frac{\pi}{2^{n+1}} = \theta$ とおくと $n \to \infty$ のとき $\theta \to 0$

$$\text{よって (与式)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2}{\pi}\theta \times \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

(Σ でかくと) $a_1 = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} a_k = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{2}{a_{k-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k a_k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1} a_{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} b_k - \sum_{k=2}^{n} b_{k-1}$$

$b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$-)\ b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$

$$= \frac{1}{2} + b_n - b_1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n a_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n a_n}$$

8 30の階乗 30! について，以下の問いに答えよ。

(1) 2^k が 30! を割り切るような最大の自然数 k を求めよ。

(2) 30! の一の位は 0 である。ここから始めて十の位，百の位と順に左に見ていく。最初に 0 でない数字が現れるまでに，連続していくつの 0 が並ぶかを答えよ。

(3) (2) において，最初に現れる 0 でない数字は何であるかを理由とともに答えよ。

(1) 30! に含まれる素因数2の個数を調べて

$$\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{4}\right]+\left[\frac{30}{8}\right]+\left[\frac{30}{16}\right]$$

$= 15+7+3+1$

$= 26$

$k=26$

(2) 30! に含まれる素因数5の個数を調べて

$$\left[\frac{30}{5}\right]+\left[\frac{30}{25}\right]=6+1=7$$

7個

(3) $30! = 2^{26}\times 3^{14}\times 5^{7}\times 7\times 11\times 13\times 17\times 19\times 23\times 29$

これを10^7で割り

$\frac{30!}{10^7} = 2^{19}\times 3^{14}\times 7\times 11\times 13\times 17\times 19\times 23\times 29$ この1の位を求めればよい

●M57(735—9)

法を10とし $2^5\equiv 2$，$3^3\equiv 1$．に注意し

$\frac{30!}{10} \equiv 8\times 9\times 7\times 1\times 3\times 7\times 9\times 3\times 9$

$\equiv 2^3\times 3^8\times 7^2$

$\equiv 8\times 9\times 49$

$\equiv 8$

9 -[ア] i を虚数単位とし，複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1) a を実数の定数とする。条件

$$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$$

を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき，a の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数 α に対して，3点 0, 1, α を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) α, β を (2) の複素数とする。点 α が (1) の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。

(1) $z = x+yi$ とおく

$1-x-yi = (a+i)(x+yi-x+yi)$

$= (a+i)\times 2yi$

$= 2ayi - 2y$

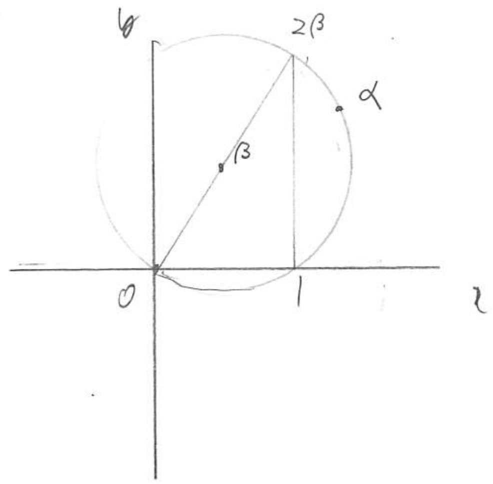
$(1-x+2y)-(1-2a)yi=0$

$\begin{cases} 1-x+2y=0 \\ (1-2a)y=0 \end{cases}$

$a \neq \frac{1}{2}$ のとき $y=0,\ x=1$ となり z の全体は不適

よって $a=\frac{1}{2}$ （このとき z の全体は直線 $1-x+2y=0$ となり適）

(2)



$\begin{cases} |\beta| = |\beta-1| \cdots ① \\ |\beta| = |\alpha-\beta| \cdots ② \end{cases}$

①より $\beta\overline{\beta} = (\beta-1)(\overline{\beta}-1)$

$= \beta\overline{\beta} - \beta - \overline{\beta} + 1$

$\therefore\ \beta + \overline{\beta} = 1 \cdots ①'$

②より $\beta\overline{\beta} = (\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$= \alpha\overline{\alpha} - \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta}$

$\alpha\overline{\alpha} - \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = 0 \cdots ②'$

①'より $\overline{\beta} = 1-\beta$ これを②'に代入

$\alpha\overline{\alpha} - \alpha(1-\beta) - \overline{\alpha}\beta = 0$

$\alpha\overline{\alpha} - \alpha + \alpha\beta - \overline{\alpha}\beta = 0$

$(\alpha-\overline{\alpha})\beta = \alpha(1-\overline{\alpha})$

α が実軸上にないので $\alpha-\overline{\alpha} \neq 0$ より

$\beta = \dfrac{\alpha(1-\overline{\alpha})}{\alpha-\overline{\alpha}}$

(3) α は実数でるく $\beta = \dfrac{\alpha(1-\overline{\alpha})}{\alpha-\overline{\alpha}}$ と表せるとき

$\alpha = x+yi$ とおく（ただし $1-x+2y=0$）

このとき

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{\cancel{x+yi}} \cdot \dfrac{\cancel{(x+yi)}(1-x+yi)}{(x+yi)-(x-yi)}$

$= \dfrac{1-x+yi}{2yi}$

$= \dfrac{-2y+yi}{2yi}$

$= \dfrac{-2+i}{2i}$

$= \frac{1}{2}+i$ （一定）

（別解） α が(1)の直線上を動くとき

$1-\overline{\alpha} = \left(\frac{1}{2}+i\right)(\alpha-\overline{\alpha})$

このとき $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1-\overline{\alpha}}{\alpha-\overline{\alpha}} = \frac{1}{2}+i$ （一定） ← コッチの方がメチャ簡単