

千葉大学医学部 2003年 数学 (追加問題含む)

6 R を平面上の凸6角形とし、その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく。

R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ。

(2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3) R が (2) の条件を満たし、さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき、 R の面積を求めよ。

7 実数 t に対して、 u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ の実数解のうち
で絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = -2t \quad (t \text{ は実数})$$

と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め、 $f(t)$ のグラフをかけ。

9 関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され、すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき、以下の命題について、正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

(1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。このとき、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。

(2) $f(0) = 0$ かつ、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ である。

(3) $f(0) = 0$ かつ、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$ である。

10 a は定数とし, n は 2 以上の整数とする。関数

$$f(x) = ax^n \log x - ax \quad (x > 0)$$

の最小値が -1 のとき, 定積分

$$\int_1^e f(x) dx$$

の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

11 p を素数とする。 x に関する 2 次方程式

$$px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$$

が整数の解を持つのは $p = 2$ のときに限ることを示せ。

14 - **[ア]** a を実数とし, z を複素数とする。複素数平面上で, a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が, あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし, a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。

