

平成 20 年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から解答を始めるよう合図があったら、まず最初に解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は 0 点となることがある。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は 12 頁である。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机の上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) x を有理数とする。 $7x^2$ が整数ならば、 x は整数であることを示せ。
- (2) a, b を整数とする。 $a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば、 a と b はともに偶数であることを示せ。
- (3) r は整数、 s は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば、 s は整数であることを示せ。

7 平面上の $\triangle ABC$ において、辺 AB を $4:3$ に内分する点を D 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし、線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$ とするとき、ベクトル \overrightarrow{AO} を \vec{p} 、 \vec{q} で表せ。

(2) 点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき、3 辺 AB 、 BC 、 CA の長さの 2 乗の比を求めよ。

8 1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し、その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し、1 つがこれと異なる場合には、2 つの同じ値を X とし、3 つとも同じならその値を X とする。

(1) 確率 $P(X \leq k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。

(2) 確率 $P(X = k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。

(3) $P(X = k)$ が最大となる k の値はいくつか。

11 実数 a, b は $0 < a < b$ を満たし, x, y, z はいずれも a 以上かつ b 以下であるとする。このとき次を示せ。

(1) $x + y = a + b$ ならば, $xy \geq ab$ である。

(2) $x + y + z = a + 2b$ ならば, $xyz \geq ab^2$ である。

12 $c \geq 0$ に対して、連立不等式

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}, \quad 0 \leq y \leq |\sin x - c|$$

で表される座標平面上の図形を A とする。

- (1) A の面積 S を最小にするような c の値と、そのときの S を求めよ。
- (2) A を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする。
 V を最小にするような c の値と、そのときの V を求めよ。

