2009年 千葉

7 a と k を正の実数とする。$y=\dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点Oを通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を ℓ とする。放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a と k を用いて表せ。

(2) $k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

$C_1:\ y=\dfrac{a}{2}x^2+bx+c$ が $(0,0)$ で $y=kx$ に接するので

$\dfrac{a}{2}x^2+(b-k)x+c=0$ は $x=0$ を重解にもつ

$c=0$ かつ $x\left(\dfrac{a}{2}x+b-k\right)=0$ より $b-k=0$

$\therefore\ C_1:\ y=\dfrac{a}{2}x^2+kx$

同様にして $C_2:\ y=-\dfrac{2}{a}x^2+b'x+c'$ と $y=kx$ が接するので

$-\dfrac{2}{a}x^2+(b'-k)x+c'=0$

が $x=0$ を重解にもつので

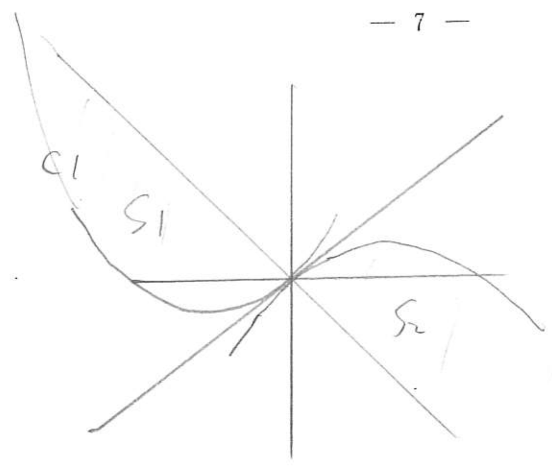
$c'=0,\quad b'=k$

$\therefore\ C_2:\ y=-\dfrac{2}{a}x^2+kx$　　$=-\dfrac{1}{k}x$

$\dfrac{2}{a}x=+k+\dfrac{1}{k}$

$\dfrac{a}{2}($

また，ℓ の方程式は $y=-\dfrac{1}{k}x$ であり，



C_1 と ℓ の交点が $\dfrac{a}{2}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ より $\dfrac{a}{2}x^2+\left(k+\dfrac{1}{k}\right)x=0$

より $x=0,\ -\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$

これより $S_1=-\dfrac{a}{2}\displaystyle\int_{-\frac{2}{a}(k+\frac{1}{k})}^{0}x\left\{x+\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)\right\}dx$

$=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{8}{a^3}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{3a^2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3$

同様にして $S_2=\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{a^3}{8}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3\right\}=\dfrac{a^2}{24}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3$

以上より $\underline{S=\left(\dfrac{2}{3a^2}+\dfrac{a^2}{24}\right)\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3}$ //

(2) $k=\sqrt{2}-1$ とすると

$k+\dfrac{1}{k}=\sqrt{2}-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=2\sqrt{2}$

より，$S=16\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{3a^2}+\dfrac{a^2}{24}\right)$

$\dfrac{2}{3a}>0,\ \dfrac{a^2}{24}>0$ だから 相加平均 ≧ 相乗平均 より

$S=16\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{3a^2}+\dfrac{a^2}{24}\right)\geqq 32\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{2a^2}{72a^2}}=\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$

等号は $3a^4=48$　$a=2$ のとき 成立するので

S の最小値は $\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$

$\underline{\text{そのときの}\quad a=2}$ //

8 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた4つの番号の積を X とおく。

(1) X が5の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が12の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X が平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。

余事象，すなわち

(1) 5以外の4枚を取り出す確率を求めて

$$\frac{{}_8C_4}{{}_9C_4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{5}{9}$$

よって $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

(2) 事象E：積が4の倍数
〃F：〃 3 〃 とする

$P(E\cap F)=1-P(\overline{E\cap F})$
$=1-\{P(\overline{E}\cup\overline{F})\}$
$=1-\{P(\overline{E})+P(\overline{F})-P(\overline{E}\cap\overline{F})\}$

積が4の倍数にならないのは

${}_5C_4+{}_2C_1\times{}_5C_3=5+10\times2=25$

偶数1枚は2か6

◇M4(359—48)

積が3の倍数にならないのは

${}_6C_4={}_6C_2=15$通り

積が4の倍数にも3の倍数にもならないのは

1,2,5,7を選ぶ

1通り

よって $P(E\cap F)=1-\frac{25+15-1}{{}_9C_4}$

$=1-\frac{39}{126}$

$=\frac{29}{42}$

1 2 4 8
〃 〃 〃 〃
1 2 2^2 2^3

(3) 1, 2, 3, 4, ~~5~~, 6, ~~7~~, 8, 9
〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃
1 2 3 2^2 5 2×3 7 2^3 3^2

5,7を選ぶと平方数にはならない，このとき

$X=2^{2m}\cdot3^{2n}$ の形になる

$n=2$のとき 3,6,9を選び，$3\times6\times9=3^4\times2$
あと1枚は 2か8 (2,3,6,9)(3,6,8,9)

$n=1$のとき 3,6を選ぶとき $3\times6=2\times3^2$
あと2枚は (1,2)(1,8)(2,4)(2,8)
9を選ぶとき $9=3^2$
あと3枚は 1,2,4,8の中から
(9,2,4,8)(9,1,2,8)
(2,4,8)(1,2,8) を選ぶ

$n=0$のとき (1,2,4,8)を選ぶ

以上より $\frac{9}{{}_9C_4}=\frac{9}{126}=\frac{1}{14}$

10 次の問いに答えよ。

(1) 置換 $x=\tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ を求めよ。

(2) $t>1$ に対して $g(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$ と定める。$t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束するような正の実数 a,b を求めよ。

(1) $x=\tan^3\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$dx = 3\tan^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\to 3\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$

よって

$$与式=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\tan^2\theta}-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)\cdot 3\tan^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{\cos^2\theta}-3\tan^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{\cos^2\theta}-3\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

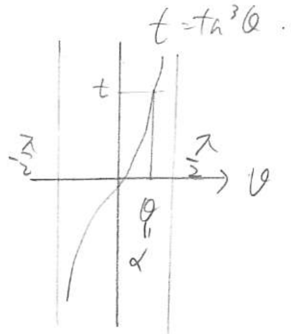
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}3\,d\theta$$

$$=3[\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

(2) $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $\tan^3\theta$ は単調に増加するので，

$t\to\infty$ のとき $\theta\to\frac{\pi}{2}-0$ である。



(1)より $\tan^3\theta=t$ となる θ を φ とおくと

$$\underbrace{\int_1^t\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx}_{f(t)}-\underbrace{\int_1^t\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx}_{g(t)}=3[\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}=3\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g(t)=\int_1^t\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx-3\alpha+\frac{3}{4}\pi$$

$x^{-\frac{2}{3}}$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_1^t-3\alpha+\frac{3}{4}\pi$$

$$=3t^{\frac{1}{3}}-3\alpha+\frac{3}{4}\pi$$

すると $t\to\infty$ のとき

$$\lim_{t\to\infty}\left(g(t)-3t^{\frac{1}{3}}\right)=-3\alpha+\frac{3}{4}\pi$$

$a=3,\ b=\frac{1}{3}$ とすると

$t\to\infty$ のとき $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ なので，

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(g(t)-at^b\right)$ は $-\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi=-\frac{3}{4}\pi$ に収束する

これより $a=3,\ b=\frac{1}{3}$ である。

11 次の問いに答えよ。

(1) 5以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ。

(2) N を自然数とする。$6N-1$ は，$6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ。

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

(1) 6以上の素数は

$6n$, $6n\pm1$, $6n\pm2$ のいずれかの形で表されるが

$6n$ は 2, 3 の倍数となり素数ではない

$6n\pm2=2(3n\pm1)$ ≧5 のとき $n\geqq1$ で このとき 2の倍数となり

素数ではない。よって 5以上の素数は

$6n+1$ または $6n-1$ の形で表される。

(2) $6N-1$ は 2でも3でも割り切れないので，素因数分解

をしたときに現われる素数は5以上である。

よって現れる素数は $6n+1$，または $6n-1$ の形で表される。

ここで素因数分解の結果が

$$6N-1=(6n_1+1)(6n_2+1)\cdots(6n_r+1)$$

と表されたと仮定すると，左辺は6で割ると余りが5，

右辺は余りが1で矛盾する。よって

$6N-1$ は $6n-1$ の形で表されるものがある。

(3) $6n-1$ で表される素数のひとつに5がある。

ここで $6n-1$ の形で表される素数が有限個と

仮定すると，その中で最大のものが存在するので

それを M とおく。$M\geqq5$ である ここで

$$M!=\underbrace{M(M-1)\cdots5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{6N}$$

は6の倍数なので $M!-1$ は $6N-1$

の形で表される。ここで $M!-1$ は 2から M

までのどの整数で割っても割り切れないが

$M!-1$ は (2)より $6n-1$ の形で表される素数を

約数にもつ。つまり $M!-1$ が $6n-1$ の形で現される

素数となり $M!-1>M$ だから矛盾 よって

$6n-1$ の形で表される素数は無限に多く存在する

12 aを実数とするとき，関数

$$f(x)=x+a^2-2,\quad g(x)=x(x-a)(x-a-2)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 命題「$f(x)\geqq 0 \Longrightarrow g(x)\geqq 0$」がすべての実数$x$について成り立つために$a$が満たすべき条件を求めよ。

(2) 命題「$x\geqq 0 \Longrightarrow$「$f(x)\geqq 0$ または $g(x)\geqq 0$」」がすべての実数xについて成り立つためにaが満たすべき条件を求めよ。

(1) $f(x)\geqq 0$

$\Leftrightarrow x+a^2-2\geqq 0$

$\Leftrightarrow x\geqq 2-a^2$ であり，これを満たすすべての実数xで

$g(x)=x(x-a)(x-a-2)\geqq 0$ が成り立つのは.

(i) $a>0$のとき

$2-a^2\geqq a+2$ であればよいが

$a^2+a\leqq 0$

$a(a+1)\leqq 0$

$-1\leqq a\leqq 0$ これは矛盾

(ii) $a=0$のとき

$x\geqq 2$ をみたす全てのxで $x^2(x-2)\geqq 0$は成り立つので

$a=0$は適

(iii) $-2<a<0$のとき

$2-a^2\geqq a+2$

$a^2+a\leqq 0$

$-1\leqq a\leqq 0$ であればよいが

$-2<a<0$より $-1\leqq a<0$

のとき成り立つ

(iv) $a=-2$のとき

$x\geqq -2$ をみたす，すべてのxで

$x^2(x+2)\geqq 0$は成り立つ

(v) $a<-2$のとき

$2-a^2\geqq 0$

$-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$ であればよいが

$a<-2$ より 不適

以上より $a=-2,\ -1\leqq a\leqq 0$

(2) $x\geqq 0 \Rightarrow x\geqq -a^2+2$ …① または $x(x-a)(x-a-2)\geqq 0$ …②

が成り立つaの条件は，

$x=0$のときは つねに②が成り立つので，

$x>0 \Rightarrow x\geqq -a^2+2$ または $x\leqq a,\ a+2\leqq x$

が成り立つ条件を求める

(i) $-a^2+2\geqq a+2 \Leftrightarrow -1\leqq a\leqq 1$ のとき

$a+2\leqq 0$, $a\leqq -2$ 不適

(ii) $a\leqq -a^2+2\leqq a+2 \Leftrightarrow -2\leqq a\leqq -1,\ 0\leqq a\leqq 1$ のとき，

$-a^2+2\leqq 0$

$a\leqq-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\leqq a$ ∴ $-2\leqq a\leqq-\sqrt{2}$

(iii) $-a^2+2\leqq a$ $a\leqq -2,\ 1\leqq a$のとき

$a^2+a-2\geqq 0$ つねに成立

$(a+2)(a-1)\geqq 0$

以上より $a\leqq-\sqrt{2},\ 1\leqq a$