

## 平成22年度入学者選抜学力検査問題

## 数 学

## 注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は11ページです。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

5 放物線  $y = x^2$  と直線  $y = ax + b$  によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b\}$$

とし、 $D$  の面積が  $\frac{9}{2}$  であるとする。座標平面上で、 $x$  座標、 $y$  座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1)  $a = 0$  のとき、 $D$  に含まれる格子点の個数を求めよ。
- (2)  $a, b$  が共に整数であるとき、 $D$  に含まれる格子点の個数は、 $a, b$  の値によらず一定であることを示せ。



**6** 数直線の原点上にある点が、以下の規則で移動する試行を考える。

(規則) サイコロを振って出た目が奇数の場合は、正の方向に1移動し、出た目が偶数の場合は、負の方向に1移動する。

$k$ 回の試行の後の、点の座標を  $X(k)$  とする。

- (1)  $X(10) = 0$  である確率を求めよ。
- (2)  $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(5) \neq 0$  であって、かつ、 $X(6) = 0$  となる確率を求めよ。
- (3)  $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(9) \neq 0$  であって、かつ、 $X(10) = 0$  となる確率を求めよ。



**9**  $a$  を 1 より大きい実数とし、座標平面上に、点  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$  をとる。

曲線  $y = \frac{1}{x}$  上の点  $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$  と、曲線  $y = \frac{a}{x}$  上の点  $Q\left(q, \frac{a}{q}\right)$  が、3条件

- (1)  $p > 0, q > 0$
- (2)  $\angle AOP < \angle AOQ$
- (3)  $\triangle OPQ$  の面積は 3 に等しい

をみたしながら動くとき、 $\tan \angle POQ$  の最大値が  $\frac{3}{4}$  となるような  $a$  の値を求めよ。



**10** 以下の問いに答えよ。

(1)  $3^n = k^3 + 1$  をみたす正の整数の組  $(k, n)$  をすべて求めよ。

(2)  $3^n = k^2 - 40$  をみたす正の整数の組  $(k, n)$  をすべて求めよ。





**11**  $f(x)$  は実数全体で定義された関数とする。実数  $a$  に関する条件 (P) を考える。

(P) 正の実数  $r$  を十分小さく選べば,  $|x - a| < r$  をみたすすべての実数  $x$  に対して  $f(x) \leq f(a)$  が成り立つ。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 実数  $a$  が条件 (P) をみたし, かつ,  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能ならば,  $f'(a) = 0$  であることを証明せよ。

(2) 関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \begin{cases} |x| - x & (x < 1 \text{ のとき}) \\ |x^2 - 6x + 8| & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき, 条件 (P) をみたすような実数  $a$  全体の集合を決定せよ。

(3) 一般に, 実数全体で定義された関数  $f(x)$  に対し, 次の命題は正しいか。正しいければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ。

(命題) すべての実数  $a$  が条件 (P) をみたすならば,  $f(x)$  は定数関数である。



