SC 方式必須 150 題　ⅠＡ ⅡＢ・Ｃ

【１】

因数分解せよ.

(1)　$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$

(2)　x^4+64

(3)　$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

【２】

次の二重根号をはずせ.

(1)　$\sqrt{12-4\sqrt{5}}$

(2)　$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

【３】

$y=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$の最小値を求めよ.

【４】

$x+y=3,\ xy=1$のとき,次の式の値を求めよ.

(1)　x^3+y^3

(2)　$\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}$

【５】

$x+\dfrac{1}{x}=3$　$(x>0)$　のとき,次の式の値を求めよ.

(1)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(2)　$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

【６】

次の方程式を解け,ただし$[x]$はxを超えない最大の整数を表す.

$$\left[\frac{x}{2}\right]=\left[\frac{x+1}{3}\right]$$

【７】

(1)　$x^2-3x+2>0$　を解け.

(2)　$x^2-2x+1\leqq 0$　を解け.

(3)　$|x+1|+|x-3|=6$　を解け.

【８】

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}$$

について,

(1)　$x+y$　を求めよ.

(2)　$x+y>0$のとき, x, y　を求めよ.

【９】

２つの２次方程式

$$\begin{cases} x^2-3x+a-1=0 \\ 2x^2-7x+3a+5=0 \end{cases}$$

が共通解をもつとき,

(1)　a の値を求めよ.

(2)　共通解 x を求めよ.

【１０】

連立方程式

$$\begin{cases} 2x^2-y^2=9 \\ \dfrac{2}{3}xy+x^2=3 \end{cases}$$

を解け.

【１１】

２つの不等式

$$\begin{cases} (x-3)(x+a) & < 0 \quad \cdot\cdot\cdot ① \\ (x-1)(x+2) & > 0 \quad \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

①,②をともにみたす整数x がちょうど２個ある

(1)　ともにみたす２個の整数 x を求めよ.

(2)　a のとりうる値の範囲を求めよ.

【１２】

$a+b+c=0, abc \neq 0,$のとき $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ の値を求めよ.

【１３】

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ のとき, $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a-c-e}{b-d-f}$ が成り立つことを証明せよ.

【１４】

$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=k$　のとき, k の値を求めよ.またk がその値をとるような(a,b,c) の値を一組求めよ.

【１５】

次の不等式が成り立つことを示せ.また等号が成り立つ条件を求めよ.

(1)　$(ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$（シュワルツの不等式）

(2)　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$

(3)　$a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0$ のとき,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

【１６】

$|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$ のとき, 次の不等式がなりたつことを示せ.

(1)　$ab + 1 > a + b$
(2)　$abc + 2 > a + b + c$

【１７】

$a > 0$, $b > 0$ のとき $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ の最小値と, そのときの ab の値を求めよ.

【１８】

$x^2 + y^2 + z^2 = 14$ のとき, $(2x - 3y + z)^2$ の最大値とそのときの (x, y, z)を求めよ.

【１９】

次の等式が x についての恒等式となるように,定数 a, b, c の値を求めよ.

(1)　$ax(x-1) + b(x-1)(x+1) + cx(x+1) = x^2 - 4x - 3$
(2)　$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + 1 = x^3$

【２０】

方程式　$5x - 7y = 11$ をみたす整数 (x, y) とする.

(1)　(x, y)　を１組求めよ.
(2)　$|x + y|$　を最小にする (x, y) を求めよ.

【２１】

(1)　$xy-2x+3y=10$ をみたす整数（x, y）の組をすべて求めよ.

(2)　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$　をみたす自然数 (a, b, c) の組をすべて求めよ.

【２２】

(1)　$3x^2-9x-5$ を　$x-3$ で割ったときの商と余りを求めよ.

(2)　$\frac{3x^2-9x-5}{x-3}$ が整数となるような整数 x をすべて求めよ.

【２３】

$x=\sqrt{3}-1$ のとき,

(1)　x^2+2x-2　の値を求めよ.

(2)　x^3+x^2-5x+7　の値を求めよ.

【２４】

(1)　連続する 3 整数の積は 6 の倍数であることを説明せよ. (簡単にでよい)

(2)　n が整数のとき，$n(n-1)(2n-1)$ は 6 の倍数であることを示せ.

【２５】

次の□の中に「(ア)必要条件(イ)十分条件(ウ)必要十分条件(エ)必要条件でも十分条件でもない」のうち適当なものの記号をかけ.

(1)　$a = b$ は $a^2 = b^2$ であるための □
(2)　$ab > bc$ は $a > c$ であるための □
(3)　$x^2 + xy + y^2 = 0$ は $x = y = 0$ であるための □
(4)　$(a-b)(b-c) = 0$ は $a = b = c$ であるための □
(5)　$ab = 0$ かつ $a + b \neq 0$ は $a \neq 0$ または $b \neq 0$ であるための □
(6)　$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ は $a = b = c$ であるための □
(7)　$(a-b)(b-c)(c-a) < 0$ であることは $a > b > c$ であるための □
(8)　$A \cap B = A \cap C$ かつ $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$ であることは$B \subset C$ であるための □

【２６】

次の命題の逆, 裏, 対偶をかき, その真偽を判定せよ.
(命題) $x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ ならば　$x + y \geqq 2$

【２７】

m, n を整数とするとき, $m \times n$ が偶数ならば, m, n の少なくとも一方は偶数であることを対偶を用いて証明せよ.

【２８】

$x + y + z > 3$ ならば x, y, z のうち少なくとも 1 つは 1 より大きいことを背理法を用いて証明せよ.

【２９】

次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ.

(1)　頂点が $(3,\ -6)$ で, x 軸方向に 3, y 軸方向に -1 平行移動すると点 $(4,\ 1)$を通る放物線.

(2)　$(3, 4)$ を通り, 直線 $y=1$ について対称移動すると点 $(2, 0)$ で x 軸に接する放物線.

(3)　2 点 $(-3, 0)$, $(5, 0)$ で x 軸と交わり, 点 $(1, 1)$ を通る放物線.

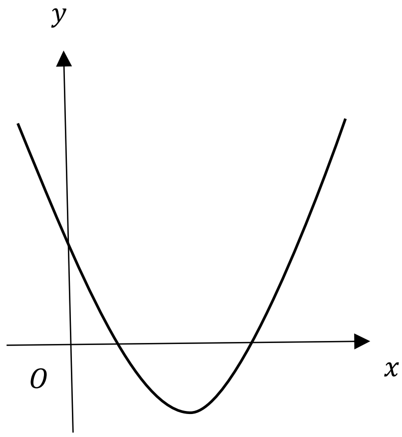
【３０】

$y=ax^2+bx+c$　のグラフが図のようになるとき, 次の各々の符号を定めよ.

① a　　② b

③ c　　④ $\dfrac{b}{2a}$

⑤ b^2-4ac　⑥ $a-b+c$



【３１】

方程式 $x^2-2ax+2a^2-5=0$ の解について,

(1)　1 より大きい 2 解をもつとき, a の値のとりうる範囲を求めよ.

(2)　1 より大きい解と小さい解をもつとき, a の値のとりうる範囲を求めよ.

【３２】

(1)　$y=|x|(|x-3|-1)$　のグラフをかけ.

(2)　x の方程式 $|x|(|x-3|-1)=a$ (a は実数の定数) の異なる実数解の個数を a の値の範囲により調べよ.

【３３】

x, y が実数で $x+2y=1$ をみたしながら動くとき, $2x+3y^2$ の最小値を求めよ.

【３４】

x, y が実数で $x^2+2y^2=1$ をみたしながら動くとき, $2x+3y^2$ の最大値と最小値を求めよ.

【３５】

x, y が実数で $x^2+2y^2=1$ をみたしながら動くとき, $x+y$ の最大値と最小値を求めよ.

【３６】

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ のとき, $x-4xy+2y$ の最大値を求めよ.

【３７】

$f(x)=x^2+2ax-a+2$ (a は実数の定数) とする.

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ.
(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ.
(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ のすべての実数 x に対しての $f(x)>0$ が成り立つような a の範囲を求めよ.

【３８】

$y=x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\,(x>0)$ について $t=x+\frac{1}{x}$ とする.

(1)　y を t を用いて表せ.
(2)　y の最小値とそのときの x の値を求めよ.

【３９】

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，で $sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$，のうち１つが次のように与えられるとき，他の２つの値を求めよ.

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

(2)　$\cos\theta = -\frac{2}{3}$

(3)　$\tan\theta = \frac{4}{3}$

【４０】

$t = \tan\frac{\theta}{2}$ とするとき, $sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$　を t を用いて表せ.

【４１】

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\sin\theta - cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin\theta\, cos\theta$, $\sin\theta + cos\theta$, $\sin^3\theta - \cos^3\theta$ の値を求めよ.

【４２】

次の式の値を求めよ.

(1)　$\sin 80^\circ + \cos 110^\circ + \sin 160^\circ + \cos 170^\circ$

(2)　$\tan\left(90^\circ - \theta\right)\tan\left(180^\circ - \theta\right)$

【４３】

(1)　方程式 $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=k$ の解が $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{12}$ の範囲に存在するような k の値の範囲を求めよ.

(2)　方程式 $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=k$ の解が $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{12}$ の範囲にただ一つ存在するような k の値の範囲を求めよ.

【４４】

次の等式が成り立つとき, この三角形はどのような三角形か.

(1)　$b\sin B=c\sin C$

(2)　$\sin A\cos A=\sin B\cos B$

【４５】

三角形 ABC において　$\sin A:\sin B:\sin C=7:6:3$, $\mathrm{AB}=6$ が成り立つとき ,

(1)　$\sin A$ *の値を求めよ.*

(2)　三角形 ABC の面積を求めよ.

【４６】

数列 $\{a, b, c\}$ が等比数列をなし, その和は 19 であり, 数列 $\{b, c, d\}$ が等差数列をなし, その和は 12 である. a, b, c, d の値を求めよ.

【４７】

等差数列 $\{a_n\}$ があり, $a_1=50$, $S_8=S_{18}$ であるとき, S_n の最大値を求めよ.

【４８】

数列$\{a_n\} = \{1, 3, 7, 13, 21, \cdots\}$について

(1)　$a_{n+1} - a_n$ を求めよ.
(2)　a_n を求めよ.

【４９】

等差数列　$\{a_n\}$, 等比数列$\{b_n\}$がある. $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
とおくと, $c_1 = 2$, $c_2 = 6$, $c_3 = 14$, $c_4 = 34$ である.

(1)　数列$\{b_n\}$の公比 r を求めよ.
(2)　数列 c_n の一般項を求めよ.

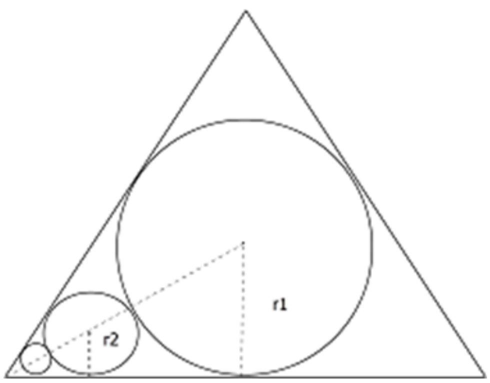
【５０】

公比が負の数である等比数列がある.　初項から第 4 項までの和は-15, 第 5 項と第 6 項との和は-48 である.

(1)　第 n 項までの和を S_n とするとき, $\dfrac{S_6}{S_4}$ の値を求めよ.
(2)　この数列の初項と公比を求めよ.

【５１】

一辺の長さ$2\sqrt{3}$ の正三角形に内接する円 C_1, 半径を r_1 とし, 図のように次々と円 C_n に外接し, 正三角形の２辺に接する円 C_n を作っていく.



(1)　r_1 を求めよ.
(2)　円 C_n の面積 a_n を求めよ.

【５２】

次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(2k+3)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}(k-2)^2$

【５３】

初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられる数列の一般項を求めよ.

(1) $S_n = 6n^2$

(2) $S_n = 2n^2 + n + 1$

【５４】

次の和を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(3) $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+n\cdot 1$

(4) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^{n-1}$

【５５】

数列　$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{4}, \ldots$　について

(1) この数列の第 450 項を求めよ.

(2) この数列の初項から 450 項までの和を求めよ.

【５６】

次の漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

(1)　$a_1 = -2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$

(2)　$a_1 = -6$, $a_{n+1} = 2a_n - 3^n$

(3)　$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - 3n$

【５７】

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ で定義される数列 a_n について,

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　(1) を利用して a_n を求めよ.

【５８】

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 0$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について,

(1)　$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ をみたす (α, β) を 2 組求めよ.

(2)　a_n を求めよ.

【５９】

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n とする.　このとき,

$$5a_n = 4S_n + 3n + 2 \left(n = 1,2,3,\cdots\right) \cdots ①$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について,

(1)　a_1 を求めよ.

(2)　a_{n+1}　を a_n を用いて表せ.

(3)　一般項 a_n を求めよ.

【６０】

n が自然数のとき,次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

【６１】

$a>0,\ b>0$ のとき, すべての自然数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geqq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

【６２】

連続する 3 つの自然数の 3 乗の和は 9 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

【６３】

$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(2n+1)a_n+1}$ $\left(n=1,2,3,\cdots\right)$で定義される$a_n$ について,

(1) a_2,a_3,a_4 を求め, a_n を推定せよ.

(2) (1)の推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

【６４】

(1) $(2x-3)^5$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}C_{2k-1}=2^{2n-1}$ を求めよ.

(3) ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ を証明せよ.

【６５】

150 以下の自然数で, 3 の倍数の集合を A , 4 の倍数の集合を B , 5 の倍数の集合を C とする．一般に集合 X の要素の個数を n(X ）と表すことにする.

(1)　$n(A \cup B)$ を求めよ.
(2)　$n(A \cap B \cap C)$ を求めよ.
(3)　$n(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ を求めよ.

【６６】

1 から 10 までの 10 個の数の中から, 同時に 3 個の数を取り出すとき, その積が 6 の倍数となるような取り出し方は何通りあるか.

【６７】

A,B,C はいずれも自然数を要素とする集合で , A の任意の要素 a と , B の任意の要素 b に対して , $a + b \in \mathrm{C}$　が成り立つ . C の要素がすべて奇数ならば $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ であることを証明せよ.

【６８】

座標平面上で頂点 (0 , 0) から (5 , 4) への移動を考える．移動は右か上への 1 ずつの移動しか出来ないものとするとき ,

(1)　移動方法は全部で何通りあるか.
(2)　点 (2 , 1) を通る移動方法は何通りあるか.

【６９】

7 個の文字　A , B , C , D, E , F , G を 1 列に並べる順列を考える.

(1)　A , B , C が左からこの順になっているものは何通りあるか.
(2)　すべての順列を辞書のアルファベッド順の方式で並べるとき , 1856 番目を求めよ.

【７０】

9 人の人を 3 つのグループに分ける.

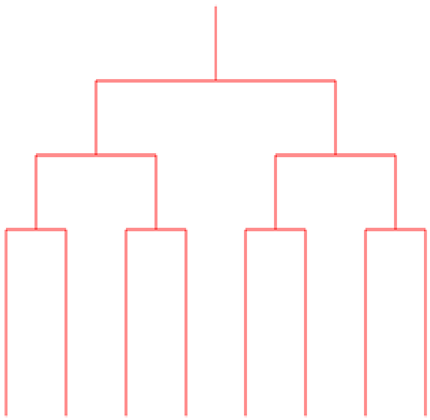
(1)　3 人ずつ　A , B , C の 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか.
(2)　3 人ずつの 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか.
(3)　5 人，２人，２人の 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか.

【７１】

(1)　n 人を A , B , C の 3 つの部屋に分ける方法は何通りあるか , ただし空になる部屋があってもよい.
(2)　n 人を A , B , C の 3 つの部屋のうち 2 つに入れる方法は何通りあるか.
(3)　n 人を 3 つの組に分ける方法は何通りあるか.

【７２】
8 人の選手でトーナメント戦（勝ち抜き選）を行う.

(1)　異なる組み合わせは何通りあるか.
(2)　8 人には実力差があり , 試合ではつねに実力上位の者が勝つとする.
このとき実力 3 位のものが決勝戦に進出するような組み合わせは何通りあるか.



【７３】

赤球２個， 白球６個， 青球１個がある.

(1) これら 9 個の球を 1 列に並べる方法は何通りあるか. また円形に並べる方法は何通りあるか.

(2) これら 9 個の球で何種類のネックレスが作れるか.

【７４】

さいころを 3 回投げて出た目の数を順に， r_1, r_2, r_3 とする.

(1) $r_1 = 1, r_1 < r_2 < r_3$ となる確率を求めよ.

(2) $r_1 < r_2 < r_3$ となる確率を求めよ.

(3) $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ となる確率を求めよ.

【７５】

袋の中に６個の白球と 4 個の黒球が入っている. この袋から 3 個の球を同時に取り出すとき, 次の確率を求めよ.

(1) 少なくとも１個が白球である確率

(2) １個が白球で, 2 個が黒球である確率

【７６】

5 人で 1 回だけじゃんけんを行うとき,

(1) 一人だけが勝つ確率を求めよ.

(2) 引き分けになる確率を求めよ.

【７７】

１から 9 までの数字を 1 つずつ書いた 9 枚のカードがある.この中から 3 枚を抜き出し出たカードに書かれている数字の積を考える.

(1)　積が偶数である確率を求めよ.
(2)　積が 8 の倍数である確率を求めよ.

【７８】

正しいものに〇印を, 正しくないものに×印をつける,いわゆる〇×式の問題が 10 問ある.　〇印と×印をでたらめにつけるとき, 少なくとも 2 問が正解となる確率を求めよ.

【７９】

A , B の 2 人がそれぞれ 1 枚の硬貨を A は 4 回 , B は 5 回投げるものとする. このとき, 次の確率を求めよ.

(1)　A が表を 3 回出す確率.
(2)　A が表をちょうど 3 回出し , B が表を 2 回出す確率.
(3)　A が表を出す回数よりも , B が表を出す回数の方が多い確率.

【８０】

ある射撃選手はつねに $\frac{2}{3}$ の確率で的に的中する. 的に 3 回的中すると予選を通過するが, 3 回的中する前にトータルで 4 回的をはずすと失格である.　この選手が予選を通過する確率を求めよ.

【８１】

2 つの事象 A, B において, $P(A)=0.4$, $P(B)=0.5$, $P_A(B)=0.8$ のとき, 次の確率を求めよ.

(1)　$P_B(A)$　　　(2)　$P(\overline{A}\cap B)$　　　(3)　$P_{\overline{A}}(\overline{B})$

【８２】

区別のつかない A, B, C 3 つの袋がある．　A の袋には白球 3 個と黒球 7 個,
B の袋には白球 5 個と黒球 5 個, C の袋には白球 7 個と黒球 3 個が入っている.
無作為に 1 つの袋を選び, その袋の中から 1 個の球を取り出すとき ,

(1)　取り出した球が白球である確率を求めよ.
(2)　取り出した球が白球のとき, それが B の袋の球である条件付確率を求めよ.

【８３】
次の計算をせよ.

(1)　$(5-i)(-2+3i)$
(2)　$\frac{-2+3i}{5+i}$
(3)　$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$ (nは奇数)

【８４】
次の式の値を求めよ.

(1)　$x=2-i$ のとき , x^4-4x^2+6x+5
(2)　$\alpha=2+i$ のとき , $\left(\frac{5}{\alpha}\right)^3+\alpha^3$

【８５】

2 つの 2 次方程式 $x^2+2ax+a=0$, $x^2+ax+a^2-3=0$ がある.

(1)　$x^2+2ax+a=0$ が実数解をもつように実数 a の値の範囲を求めよ.
(2)　ともに実数解をもつように実数 a の値の範囲を求めよ.

【８６】

a, b を実数とするとき, 次の 2 つの 2 次方程式が共通な実数解をただ 1 つだけもつような a, b の条件とそのときの共通な実数解を求めよ.

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + bx + a = 0 \end{cases}$$

【８７】

整式 $f(x)$は $x-2$ で割ると 2 余り, $(x-1)^2$ で割ると $x+2$ 余る.

(1)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ.

(2)　$f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ.

【８８】

次の方程式を解け.

(1)　$x^4 + x^2 + 1 = 0$

(2)　$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$

【８９】

$2x^2 - 3x - 1 = 0$　の 2 つの解を α , β とするとき ,

(1)　$\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(2)　$\alpha + \beta$ と $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ を 2 つの解にもつ 2 次方程式を作れ.（x^2 の係数は 1 とする）

【９０】

x についての方程式 $mx^2 - 2(m-6)x + 1 = 0$ について ,

(1)　異なる 2 つの実数解をもつための条件を求めよ.

(2)　異なる実数解の個数を求めよ.

【９１】

3 次方程式 $x^3-3x^2+2x+a=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ の値を求めよ．
(2)　$(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+(\gamma-1)^3=0$ のとき，a の値を求めよ．

【９２】

$x^2-kx+k^2-4=0$ について，

(1)　2 解がともに正となるとき k の値の範囲を求めよ．
(2)　2 解が異符号であるとき k の値の範囲を求めよ．

【９３】

2 直線 $(a+1)x+(a+3)y+2=0$，$x+(a+1)y+1=0$ が次の関係を満たすとき，定数 a の値を求めよ．

(1)　平行（ただし，一致する場合を除く）
(2)　垂直

【９４】

直線 $5(k+1)x+(k-6)y-20k+15=0$ について，

(1)　k の値にかかわらず直線は，つねにある定点を通る．　この定点の座標を求めよ．
(2)　点 $(5, 1)$ からこの直線におろした垂線の長さを h とする．h の最大値と，そのときの k の値を求めよ．

【９５】

A $(-3,1)$ とし， O を座標原点とする． 直線 ℓ ：$3x+y-1=0$ に関して，

(1) 点 A $(-3,1)$ と対称な点の座標を求めよ.
(2) ℓ 上の点を P とする. OP + AP の最小値を求めよ.

【９６】

円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ が直線 $mx+y+m=0$ から切り取る弦の長さが 2 であるとき , m の値を求めよ.

【９７】

2 円 C_1 ：$x^2+y^2=1$, C_2 ：$x^2+y^2-6x+8y+k=0$ について ,

(1) 2 円が異なる 2 点で交わるときの k の範囲を求めよ.
(2) (1) のとき 2 円の共有点を通る直線の方程式を k を用いて表せ.

【９８】

2 定点 A (2 , 1) , B $(-4,-2)$ に対して AP：BP ＝ １ ： ２ を満たして動く点 P の軌跡を求めよ.

【９９】

2 直線 $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ のなす角を 2 等分する直線の方程式を求めよ.

【１００】

放物線 c： $y=x^2$ と直線 ℓ: $y=ax+a-3$ について ,

(1) c と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつとき , a の値の範囲を求めよ.
(2) (1) の範囲を a が動くとき , c と ℓ の 2 つの共有点を P , Q とする.
　線分 P Q の中点 M の軌跡を求めよ.

【１０１】

2 直線 $kx+2y+2k=0$, $2x-ky=0$ がある． k が変化するとき 2 直線の交点 M の軌跡を求めよ.

【１０２】

円 $(x-2)^2+y^2=1$ と 直線 $y=mx$ がある. m が変化するとき , 円が直線から切り取る弦の中点 M の軌跡を求めよ.

【１０３】

実数 x , y が 3 つの不等式 $x+y \geqq 1$, $2x+y \leqq 6$, $x+2y \leqq 4$ を満たすとき ,

(1) x^2+y^2 のとりうる値の範囲を求めよ.
(2) $x-2y$ のとりうる値の範囲を求めよ.
(3) $\dfrac{y}{x+3}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

【１０４】

(1) $\sin\theta=2\cos\theta$ のとき, $\cos2\theta$ の値を求めよ.

(2) $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき， $\tan2\theta$ の値を求めよ. ただし $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする.

【１０５】

(1) $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくとき, $\sin\theta$, $\cos\theta$ を t を用いて表せ.

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ のとき， $\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ.

【１０６】

$\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta$ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) 最大値と最小値を求めよ.

【１０７】

θの範囲を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ 　とし,

$$f(\theta) = 6\sin^2\theta + 2\cos^2\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{6}\sin\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta - 3 \quad \text{とする}$$

(1)　$t = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ とおくとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

(2)　$f(\theta)$ を t を用いて表せ.

(3)　方程式　$f(\theta) = k$ の異なる解の個数が 1 個であるような k の値の範囲を求めよ.

【１０８】

(1)　$\cos 3x + \cos x = 0$ ($0 \leqq x < 2\pi$) を解け.

(2)　不等式 $\sqrt{2}\sin\theta \leqq |\sin\theta - \cos\theta|$ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) を解け.

(3)　$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ の値を求めよ.

【１０９】

直線 $y = 2x$ に関し直線 $y = \dfrac{1}{3}x$ と対称な直線の方程式を加法定理を利用して求めよ.

【１１０】

次の方程式, 不等式を解け.

(1)　$9^x - 8 \times 3^x - 9 \leqq 0$

(2)　$\log_2(x - 3) + \log_2(x + 5) < 2\log_4(3x + 5)$

(3)　$2^{\log_{10} x} - \dfrac{1}{4}x^{\log_{10} 4} = 0$

【１１１】

$y=2^{2x}+2^{x}+3+2^{-x}+2^{-2x}$ とする． x がすべての実数値をとるとき，

(1) $2^{x}+2^{-x}=t$ とするとき，y を t で表せ． また t のとりうる値の範囲を答えよ．
(2) y の最小値を求めよ．

【１１２】

正の数 x，y が $x<y^2<x^2$ の関係にあるとき，4 つの実数

$$\log_y y\sqrt{x}\ ,\log_x \frac{x^2}{y}\ ,\log_x y\ ,\ \log_y x$$

を小さい順に並べよ．

【１１３】

$\log_{10} 2=0.3010$，$\log_{10} 3=0.4771$ として，次の問いに答えよ．

(1) 4^{100} は何桁の整数か． また最高位の数を求めよ．
(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．またその数はいくらか．
(3) 1.25^{n} の整数部分が 4 桁となる自然数 n の範囲を求めよ．

【１１４】

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ を満たすような 3 次関数 $f(x)$ を求めよ．

【１１５】

曲線 C： $y=x^3+3x^2-2$ について，曲線上の点P$(-1,0)$ における接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を求めよ．
(2) ℓ と C との共有点の座標を求めよ．

【１１６】

曲線 C： $y=x^3-3x^2+2x-1$ について

(1)　点 A (1 , 1) から 曲線 C に引いた接線 ℓ の方程式を求めよ.
(2)　(1) で求めた接線と曲線 C の共有点の座標を求めよ.

【１１７】

$f(x)=x^3-x+1$, $g(x)=ax^2-5x+b$ とする．曲線 $y=g(x)$ が点 P(2 ,7) を通り ,
2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が点 P において共通な接線をもつとき , a , b の値を求めよ.
また $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つような x の値の範囲を求めよ.

【１１８】

平面上に点 P (a , b) と曲線 $y=x^3-4x$ がある．点 P からこの曲線にただ 1 本しか接線が引けないような , 点 P (a , b) の存在範囲を図示せよ.

【１１９】

$f(x)=-4\sin x\cos^2 x+9\cos^2 x-8\sin x-1$ ($0 \leqq x \leqq 2\pi$) の最大値 , 最小値を調べよ.

【１２０】

$f(x)=2x^3-3x^2+6ax$ は $x=\alpha$ で極大 , $x=\beta$ で極小となり , $f(\alpha)-f(\beta)=8$
である. a , α , β の値を求めよ.

【１２１】

関数 $y=|x^3-4x|+x$ のグラフの概形をかけ , また極小値を答えよ.

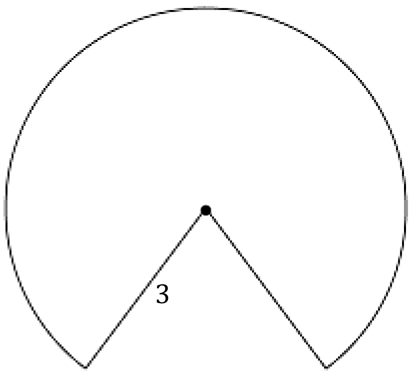
【１２２】

$p > 0$　とする． $f(x) = x^3 - 3p^2x + 2p$ について，

(1)　関数 $f(x)$ は極値をもつことを示し，その極大値，極小値を求めよ．
(2)　方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 2 個の実数解をもつための p の条件を求めよ．

【１２３】

半径 3 の円形の紙から，図のように扇形を切り取って残りの部分で直円錐を作る．
この直円錐の体積の最大値とそのときの直円錐の高さを求めよ．



【１２４】

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする． このとき，どのような 2 次以下の x の整式で表される関数 $g(x)$ に対しても $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

【１２５】

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & (|x| \geqq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

で定められる $f(x)$ について $\int_{-1}^{2} xf(x)dx$ の値を求めよ．

【１２６】

$f(x)=x^3-x+\int_0^1 tf'(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

【１２７】

$f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+t-2)\,dt$ の極値を求めよ.

【１２８】

$f(x)=\int_0^2|t^2-xt|\,dt$ の最小値を求めよ.

【１２９】

2 曲線 $y=x^2$, $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

【１３０】

2 曲線 c_1 : $y=x^2$, c_2 : $y=x^2-4x$ がある.

(1)　c_1 , c_2 の両方に接する直線の方程式を求めよ.

(2)　(1) で求めた共通接線と c_1 , c_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ.

【１３１】

$y=ax$ $(-1<a<3)$ と曲線 $y=x(x-1)(x-3)$ とが囲む 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ.

【１３２】

放物線 c : $y=x^2$ と点 (1 , 4) を通る傾き m の直線 ℓ がある.

(1)　c と ℓ は m によらずつねに異なる 2 点で交わることを示せ.
(2)　c と ℓ とで囲まれる図形の面積 S の最小値を求めよ.

【１３３】

曲線 $y=(x-3)^2$ ($0 \leqq x \leqq 4$) 上の点 P(x , y) から x 軸に垂線 PH を下ろすとき,
△ POH の面積を最大にする点 P の座標とそのときの △ POH の面積を求めよ.
ただし O は座標原点である.

【１３４】

座標平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}=(2, 2x)$, $\vec{b}=(x, 1)$ について, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき x の値を求めよ.

【１３５】

2 つのベクトル $\vec{a}=(3, 5)$, $\vec{b}=(4, -3)$ と実数 t において,

(1)　ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ が最小となる t の値 t_0 を求めよ.
(2)　$\vec{a}+t_0\overrightarrow{b}$ と $\vec{b}$ は垂直であることを示せ.

【１３６】

平面上に △ OAB があり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする. $|\overrightarrow{a}|=3$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=2$, $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{21}$ のとき,

(1)　$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$ の値を求めよ.
(2)　△ OAB の面積を求めよ.

【１３７】

△ABC の外心 O から直線 BC , CA , AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P , Q , R とするとき , $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ が成立している.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ.

(2)　∠A の大きさを求めよ.

【１３８】

∠A $=60^\circ$, AB $=3$, AC $=2$ の△ABC の垂心を H とする. ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

【１３９】

△ABC の辺 AB を 5 : 2 に内分する点を D とし , 辺 AC を 5 : 3 に内分する点を E とする. また△ABC の重心を G とし ,

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

(2)　線分 DE 上に重心 G があることを示し , DG：GE を求めよ.

【１４０】

△ABC の内部に点 P があり , 等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立っている.
直線 AP と辺 BC との交点を D とするとき ,

(1)　AP： PD , BD： DC を求めよ.

(2)　面積の比△PAB : △PBC : △PCA を求めよ.

【１４１】

△OAB において , 辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C , 辺 OB の中点を D とし , 線分 AD と線分 BC の交点を E , 辺 AB と直線 OE の交点を F とする.　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき ,

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ.

(2)　AF：FB を求めよ.

【１４２】

平面上に 3 点 O , A , B があり , $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で s , t が $3s + 4t = 2$ を満たすとき , 点 P はどのような図形上にあるか . 図示せよ.

【１４３】

平行四辺形 OACB , があり , この平面上の点 P に対し , $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の形に表す. P が平行四辺形 OACB の周上または内部にあって , $5s + 2t \leqq 3$ を満たして動くとき , P が動く領域の面積を S とする.

(1)　P が辺 CB 上にあるとき , s , t の値を求めよ.
(2)　平行四辺形 OACB の面積を 1 とするとき , P が動く領域の面積 S の値を求めよ.

【１４４】

四面体 OABC において , 辺 AB 1：2 に内分する点を D , 線分 CD を 3：5 に内分する点を E , 線分 OE を 1：3 に内分する点を F , 直線 AF が平面 OBC と交わる点を G とする.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として ,

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.
(2)　AG：FG を求めよ.

【１４５】

１辺の長さが 1 の正四面体 OABC において , 2 辺 AB , OC の中点をそれぞれ M , N とする.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として ,

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BN}}$ の値を求めよ.
(3)　∠BNM = θ とするとき , cosθ の値を求めよ.

【１４６】

平面上に異なる２点 A, B がある． 次の各条件をみたす点 P の全体はどのような図形を作るか.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}<0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\geqq 0$

【１４７】

空間において A$(1, 1, 0)$, B$(-1, 2, 1)$, C$(1, -1, 3)$ とし 3 点 ABC を通る平面を π とする.

(1)　点 D$(-2, -2, 10)$ から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

(2)　△ABC の面積を求めよ.

(3)　四面体 ABCD の体積を求めよ.

【１４８】

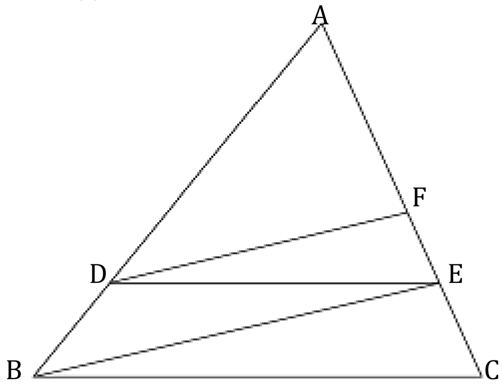
空間において, A$(1, -1, 2)$, B$(3, 1, -1)$, C$(2, 3, 2)$, D$(3, 4, 5)$ とすると,

(1)　平面 ABC の方程式 $ax+by+cz+d=0$ を求めよ.

(2)　点 D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを求めよ.

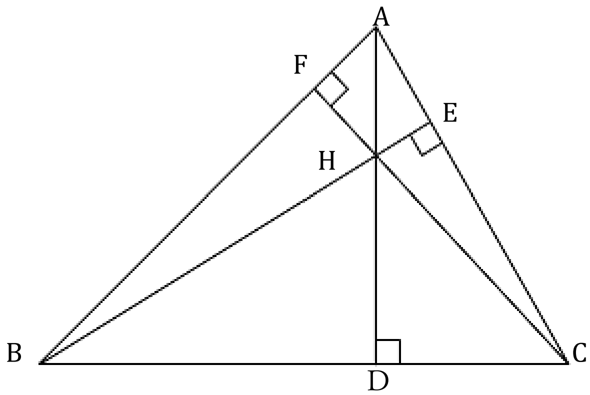
【１４９】

右の図で，BC // DE， BE // DF ならば，$AE^2 = AC \cdot AF$ であることを証明せよ．



【１５０】

鋭角三角形 ABC の 3 頂点 A，B，C から対辺に引いた垂線を，それぞれ AD，BE，CF とし，垂心を H とする，H は △DEF の内心であることを証明せよ．

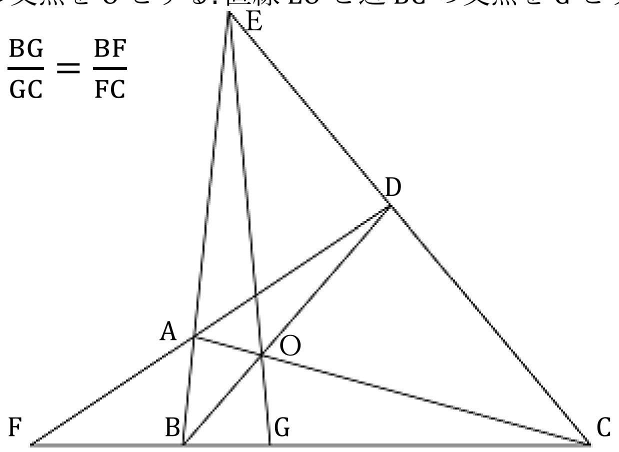


【１５１】

対辺が平行でない四角形 ABCD で，辺 AB，DC の延長の交点を E，辺 AD，BC の延長の交点を F，対角線 AC，BD の交点を O とする．直線 EO と辺 BC の交点を G とするとき，

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GC}}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$$

であることを証明せよ．

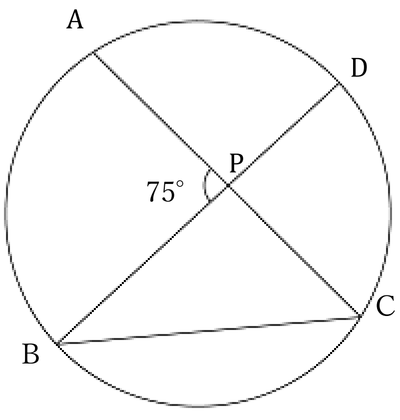


【１５２】

右の図のように，円周上に 4 点 A，B，C，D をとり，A と C，B と D，B と C を結び，AC と BD の交点を P とする．　∠APB＝75°　のとき

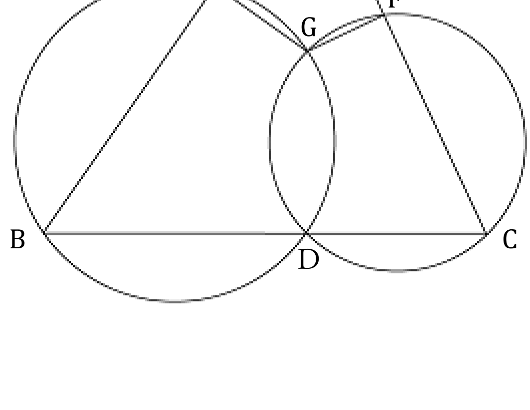
(1)　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さの和は
　　円周の長さの何分のいくつか．

(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$：$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$＝2：1 のとき，
　　∠ACB の大きさを求めよ．



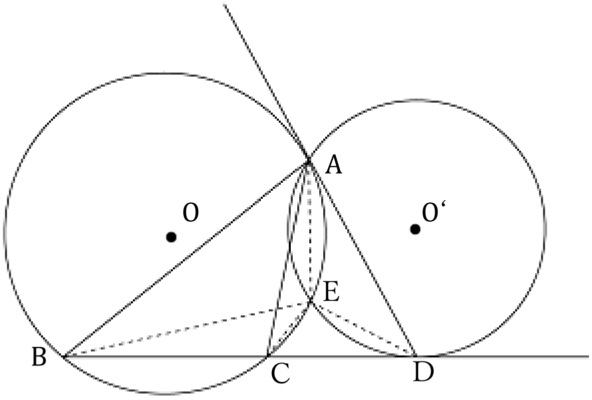
【１５３】

右の図のように，△ABC の辺 BC 上に点 D がある．2 点 B，D を通る円が辺 AB と交わる点を E，2 点 C，D を通る円が辺 AC と交わる点を F とし，この 2 円が交わる点のうち，D でない方を G とする．このとき，四角形 AEGF は円に内接することを証明せよ．



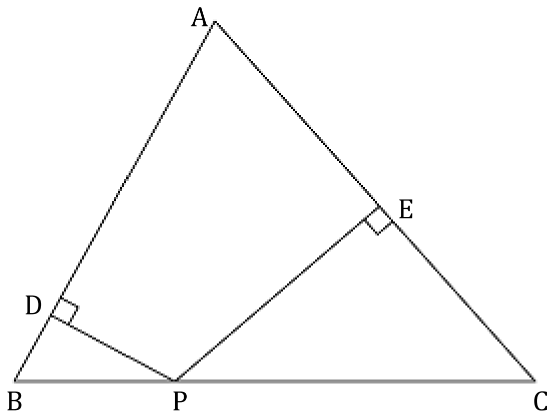
【１５４】

右の図のように , 円 O に内接する△ABC がある. 点 A における円 O の接線と直線 BC との交点を D とする.また点 A を通り,点 D で直線 BD に接する円を円 O‘とし, 円 O‘と円 O との交点のうち,点 A 以外の点を E とする.このとき, △ABE∽△CDE であることを証明せよ.



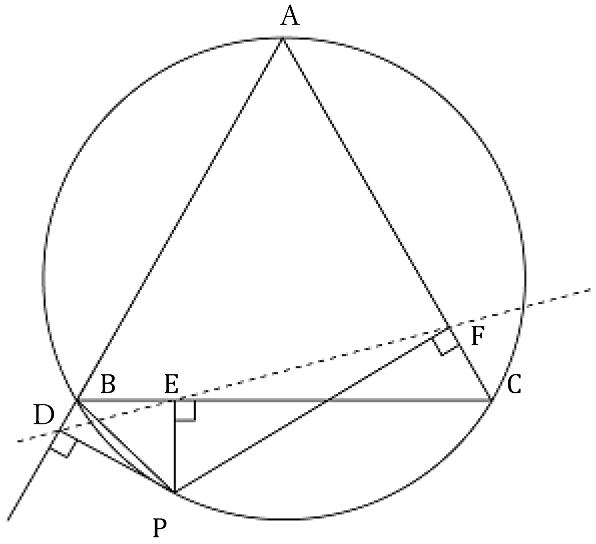
【１５５】

二等辺三角形 ABC の底辺 BC 上の任意の点 P から , 辺 AB , AC に下ろした垂線をそれぞれ PD , PE とする. このとき PD＋PE は一定であることを証明せよ.



【１５６】

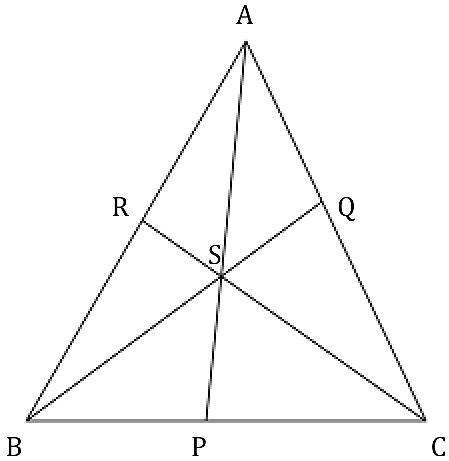
△ABC の外接円の周上の点 P から辺 AB , BC , CA または , その延長上に下ろした垂線との交点を, それぞれ D , E , F とするとき, 3 点 D , E , F は一直線上にあることを証明せよ.（この直線をシムソン線という）



【１５７】

(1)　$\triangle$ABC の辺 BC , CA , AB 上に , それぞれ P , Q , R があり , 3 直線 AP , BQ , CR が 1 点 S で交わるとする．　このとき , $\dfrac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SP}}=\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}+\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}$　であることを証明せよ.

(2)　$\triangle$ABC の内心を I とし , AI と辺 BC の交点を P とする．　3 辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とするとき , (1) の結果を用いて , $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IP}}$　の値を , a , b , c を用いて表せ.



【１５８】

円 O , および円 O と交わらない直線 ℓ があり , 円 O の半径は一定 , 点 O と直線 ℓ との距離も一定であるとする. ℓ 上を動く点 P から円 O に接線を引き , 接点を A , B とする. また , 点 O から直線 ℓ に垂線 OC を下ろし , 弦 AB と OC との交点を D とする.

(1)　直線 OP と弦 AB との交点を E とするとき , $\triangle$APE $\equiv$ $\triangle$BPE　を証明せよ.

(2)　線分 OD の長さは , 点 P の位置によらず一定であることを証明せよ.